

**УМАНСЬКИЙ ДЕРЖАВНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ ПАВЛА ТИЧИНИ**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ПЕДАГОГІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ М. П. ДРАГОМАНОВА**

Кваліфікаційна наукова
праця на правах рукопису

БЛАГОДИР Людмила Андріївна

УДК 373.5.016:512 (043.3)

ДИСЕРТАЦІЯ

**МЕТОДИЧНА СИСТЕМА АНАЛІЗУ ТА ПОПЕРЕДЖЕННЯ
МАТЕМАТИЧНИХ ПОМИЛОК У НАВЧАННІ
АЛГЕБРИ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ**

13.00.02– теорія та методика навчання (математика)

Подається на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук

Дисертація містить результати власних досліджень. Використання ідей,
результатів і текстів інших авторів мають посилання на відповідне джерело

Л. А. Благодир

Науковий керівник: **ШВЕЦЬ Василь Олександрович,**
кандидат педагогічних наук, професор

Київ –2019

АНОТАЦІЯ

Благодир Л. А. Методична система аналізу та попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі. – Кваліфікаційна наукова праця на правах рукопису.

Дисертація на здобуття наукового ступеня кандидата педагогічних наук за спеціальністю 13.00.02 «Теорія та методика навчання (математика)». – Національний педагогічний університет імені М. П. Драгоманова, Київ, 2019.

Дисертаційна робота є дослідженням з проблеми появи математичних помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі. У роботі визначено і науково обґрунтовано компоненти методичної системи попередження типових помилок школярів, як складової методичної системи навчання математики учнів основної школи. Розроблено структурні компоненти методичної системи попередження математичних помилок учнів під час вивчення змістових ліній: вирази, рівняння і нерівності та функції, реалізовано всі компоненти даної системи через організацію та здійснення превентивної діяльності. Встановлено, що застосування розробленої методичної системи сприяє запобіганню та недопущенню помилок учнями, і як наслідок, підвищенню рівня їх навчальних досягнень, успішному засвоєнню знань, формуванню предметної математичної компетентності, активізації навчально-пізнавальної діяльності.

У першому розділі дисертації «Предмет і теоретичні основи дисертаційного дослідження» здійснено аналіз проблеми математичних помилок учнів. З'ясовано, що в процесі засвоєння учнями навчального матеріалу помилки є перешкодою успішного навчання, досягнення належного рівня засвоєння знань.

На основі аналізу психолого-педагогічної літератури, виявлено відсутність цілісної та розробленої методичної системи по запобіганню, попередженню та недопущенню учнівських помилок під час вивчення алгебри в основній школі.

З'ясовано, що у зв'язку з відсутністю адекватного сучасним вимогам методичного забезпечення роботи над математичними помилками школярів, учителі в своїй практичній діяльності насамперед керуються власним досвідом та інтуїцією.

Враховуючи результати досліджень з превентивної психології та превентивної педагогіки нами введено нове поняття: превентивно-педагогічна діяльність учителя на уроках математики в умовах особистісно орієнтованого навчання, визначено мету та основні структурні компоненти такої діяльності.

Під превентивною діяльністю вчителя математики розуміємо навчальну діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та дібрати раціональні методи, організаційні форми та засоби навчання.

Превентивна діяльність має організовуватися як процес взаємодії вчителя і учнів, в ході якої через спеціально дібрані методи, по-перше, виявляється походження помилок, а по-друге, організовується робота з їх попередження та виправлення. Головним завданням формування превентивної навчальної діяльності школярів є розвиток у них уміння самостійно дотримуватися всіх її структурних компонентів і переходити від одного етапу до іншого (від прийняття рішення здійснювати певну діяльність до її планування, від дій і операцій – до самоконтролю і самооцінки).

Визначено функції і принципи превентивної діяльності, психолого-педагогічні основи та передумови організації і здійснення такої діяльності у навчанні алгебри учнів основної школи, напрями діяльності з урахуванням психолого-педагогічних особливостей учнів підліткового віку. Виокремлено ще один важливий компонент професійної культури вчителя математики – превентивну культуру. Здійснено аналіз помилок, яких припускаються учні у процесі вивчення алгебри в основній школі, досліджено та практично перевірено причини появи деяких типових помилок.

У другому розділі дисертації «Методика попередження, виявлення та виправлення помилок учнів у навчанні алгебри» розглянуто питання, що стосуються добору змісту, форм, методів та засобів для реалізації запропонованої методичної системи. Реалізовано всі компоненти даної системи через організацію та здійснення превентивної діяльності під час вивчення змістових ліній: вирази, рівняння і нерівності та функції.

На основі результатів педагогічного експерименту можна зробити висновок, що з педагогічно виваженим і обґрунтованим, цілеспрямованим використанням у навчальному процесі методики попередження, виявлення та виправлення помилок учнів у навчанні алгебри, якість знань та рівень навчальних досягнень зростає.

Ефективність розробленої методичної системи підтверджена теоретичним аналізом отриманих результатів і результатами педагогічного експерименту. Практичні результати впроваджені в практику роботи закладів загальної середньої освіти.

Ключові слова: методична система, алгебра, змістові лінії, учитель, учень, помилка, превентивна діяльність, превентивна культура, попередження помилок, виправлення помилок.

ABSTRACT

Blahodyr L. A. A methodological system of the analysis and prevention of mathematical mistakes in the process of studying algebra at the secondary school. – Manuscript.

Thesis submitted for the degree of Candidate of Pedagogical Sciences (Doctor of Philosophy). Speciality 13.00.02 «Theory and methods of teaching (mathematics)». – National Pedagogical Dragomanov University, Kyiv, 2019.

The thesis represents the research on the problem of the occurrence of students' mathematical mistakes in the process of studying algebra at the secondary school. The paper defines and elucidates the components of a methodological system of typical students' mistakes prevention as a component of a methodological system of teaching mathematics in general. The structural components of a methodological prevention system of students' mathematical mistakes while studying the content lines: expressions, equations and inequalities and functions have been developed, all components of this system are implemented through the organization and realization of a preventive activity. It has been established that the application of a developed methodological system helps to prevent and avoid students' mistakes, and, as a result, it increases their academic

achievement level and leads to successful gaining of knowledge, the formation of subjective mathematical competence, activating educational and cognitive activity.

In the first chapter «The subject and theoretical basics of the dissertation» the analysis of the problem of students' mathematical mistakes was carried out. It has been investigated that in the process of assimilation of students' learning material mistakes are an obstacle in a successful learning, achievement of the proper level of knowledge gaining.

On the basis of psychological and pedagogical literature analysis, a lack of an integral and developed methodological system of preventing and avoiding students' mistakes while studying algebra at the secondary school has been revealed.

It has been investigated that because of the absence of an adequate methodological support for work on mathematical mistakes of schoolchildren relevant to modern demands, teachers in their practical activity are primarily guided by their own experience and intuition.

Taking into account the results of research on preventive psychology and preventive education, we introduced a new concept: a preventive pedagogical activity of the teacher at the mathematics lessons in the context of personality-oriented education, the purpose and the main structural components of such activity are defined.

A preventive activity of the teacher of mathematics is understood as an academic activity initiated by the need: to prevent mathematical mistakes of students, to correct the made ones, finding out the reasons for their occurrence, and choosing the rational methods, organizational forms and means of teaching.

Preventive activity should be organized as the process of interaction between teachers and students, in the process of which, through specially selected methods, firstly, the nature and origin of errors are detected, and, secondly, work on their prevention and correction is organized. The main task of forming a preventive academic activity of schoolchildren is the development of their ability to follow all its structural components independently and move from one component to another (from

a made decision to carry out certain activities to its planning, from actions and operations – to self-control and self-evaluation).

The functions and principles of a preventive activity, psychological and pedagogical basics and the pre-conditions of organization and implementation of this activity in the process of teaching algebra, directions of activity taking into account psychological and pedagogical features of teenage students are determined. Another important component of a professional culture of the teacher of mathematics – a preventive culture – has been singled out. The analysis of the mistakes that students make while studying algebra at the secondary school have been analyzed, the reasons for the occurrence of some typical mistakes have been researched and practically verified.

In the second chapter of a thesis «Methodological system of the analysis and prevention of mathematical mistakes in the process of studying algebra at the secondary school» the issues concerning the choice of content, forms, methods and means of a suggested methodological system have been considered. All components of this system are realized through the organization and implementation of preventive activity during the study of content lines: expressions, equations and inequalities and functions.

On the basis of pedagogical experiment results it can be concluded that a pedagogically balanced, well-grounded and a purposeful use of the methodology of prevention, detection and correction of students' mistakes while studying algebra conduces to the increase in knowledge quality and academic achievements level.

The effectiveness of a developed methodological system is confirmed by a theoretical analysis of obtained results and by the results of a pedagogical experiment. Practical results are implemented into the working practice of general secondary education establishments.

Key words: methodological system, algebra, content lines, teacher, student, mistake, preventive activity, error prevention, error correction.

Список опублікованих праць за темою дисертації

Статті у наукових фахових виданнях:

1. Благодир Л. А. Робота над помилками як одна з форм подолання прогалин у знаннях і вміннях учнів. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи*: зб. наук. праць Уманського державного педагогічного університету ім. Павла Тичини / редкол.: Побірченко Н. С. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2009. Вип. 30. С. 62–70.
2. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Впровадження сучасних інформаційних технологій на уроках математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини* / редкол.: Мартинюк М. Т. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2008. Ч. 2. С. 75–82.
3. Благодир Л. А., Швець В. О. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень. *Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні науки* / МОН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Вип. 93. С. 19–28.
4. Благодир Л. А. Помилки учнів у навчанні алгебри: практичний аспект. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: міжнар. зб. наук. робіт. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2011. Вип. 35. С. 147–153.
5. Благодир Л. А. Превентивна культура вчителя математики: знання та уміння. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Вип. 33. Київ-Вінниця: Планер, 2012. С. 223–226.
6. Благодир Л. А., Швець В. О. Превентивна діяльність вчителя математики: зміст і структура. *Дидактика математики: проблемы и исследования*: межд. сб. науч. работ. Донецк: ТЕАН, 2010. Вып. 36. С. 13–18.
7. Благодир Л. А., Швець В. О. Функції і принципи превентивної діяльності вчителя математики. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія №3: Фізика і математика у вищій і середній школі*: зб. наук. праць. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. №8. С. 17–23.

8. Благодир Л. А., Швець В. О. Формування вмінь і навичок превентивної діяльності майбутнього вчителя математики. *Вища освіта України: теоретичний та науково-методичний часопис*. № 3 (46). Том 2. Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології». Київ, 2012. С. 38–46.

9. Благодир Л. А. Превентивна діяльність під час навчання школярів математики. *Математика в рідній школі*. 2014. № 2. С. 16–20.

10. Благодир Л. А. Формування методичної компетентності майбутніх учителів математики у ВНЗ. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*: наук. журнал / голов. ред. А. А. Сбруєва. Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. № 2 (56). С. 180–187.

11. Благодир Л. А. Упередження помилок учнів з алгебри у процесі вивчення змістової лінії «Вирази». *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: Педагогіка, психологія, філософія* / редкол.: С. М. Ніколаєнко (відп. ред.) та ін. Київ: Міленіум. 2018. Вип. 291. С. 25–30.

12. Благодир Л. А. Алгоритмічна компетентність як складова інформаційно-цифрової компетентності учня. *Проблеми підготовки сучасного вчителя*: збірник. наук. праць Уманського держ. пед. ун-ту імені Павла Тичини. / редкол.: Безлюдний О. І. (гол. ред.) та ін. Умань: Візаві, 2018. Вип. 17. С. 148–155.

Публікації у закордонних виданнях:

1. Благодыр Л. А., Швец В. А. Алгебраические ошибки школьников: содержание и причины. *Mathtech 2012: proceedings of the international conference*. Vol. 1. Shumen-Bulgaria: Konstantin Preslavsky University Press, 2012. С. 222–227.

2. Благодыр Л. А., Швец В. А. Предупреждение алгебраических ошибок – предпосылка успешного обучения. *Сборник научни трудове частни и обществени науки, организация, управление и методика на обучението въ ввисящите училища*. Ч II. Шумен: НВУ «В. Левски», 2014. С. 76–79.

3. Благодыр Л. А., Швец В. А. Подготовка будущего учителя математики к превентивной деятельности. *Проблемы теории и практики обучения*

математике: сб. науч. работ, представленных на Междунар. науч. конф. «67 Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. С. 60–62.

Матеріали і тези конференцій:

1. Благодир Л. А. Работа над помилками як засіб формування знань і вмінь учнів при навчанні математики. *Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука*, (15-17 трав., 2008 р., Київ): матеріали конф. Київ: Задруга, 2008. С. 157.

2. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Формування самостійної діяльності старшокласників як передумова успішного навчання у вищих навчальних закладах. *Проблеми математичної освіти»* (ПМО - 2009): матеріали міжнар. наук-метод. конф., (м. Черкаси, 7-9 квітня 2009). С. 229–231.

3. Благодир Л. А. Превентивна діяльність вчителя на уроках математики. *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики*: тези доповідей міжнар. наук.-практ. конф.: до 80-річчя з дня народження доктора пед. наук, професора З. І. Слєпкань. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2011. С. 22–23.

4. Благодир Л. А. Розвиток мислення на уроках математики. *Евристика і дидактика*: матеріали II Міжнар. науково-методичної дистанційної конференції-конкурсу молодих учених, аспірантів і студентів. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2011. С. 15–16.

5. Благодир Л. А. Формування навичок самоконтролю учнів під час вивчення математики. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ ПЛЮС-2011»*: матеріали Всеукраїнської дистанційної науково-методичної конф. з міжнародною участю. Суми, 2011. С. 22–23.

6. Благодир Л. А. Розвиток логічного мислення як засіб попередження помилок учнів під час вивчення алгебри в основній школі. *Історія та методика викладання математики*: матеріали 4-ої міжнар. наук. конф. ім. акад. М.Кравчука (19-21 квітня 2012 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2012. Т. 4. С. 50–51.

7. Благодир Л. А. Превентивна культура вчителя математики як складова професійної майстерності фахівця. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики* : зб. наук праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., (26-27 квітня 2012 р.). Вінниця: ВДПУ, 2012. С. 75–77.

8. Благодир Л. А., Благодир Ф. К., Мартинюк Н. Г. Інноваційні технології на заняттях з методики математики у педагогічних вузах, як необхідна умова формування професійної компетентності майбутнього вчителя. *Інноваційні педагогічні технології у підготовці майбутніх фахівців з вищою освітою: досвід, проблеми, перспективи*: матеріали міжнар. наук.-метод. інтернет-конференції, (Вінниця, 8-10 жовтня 2013 р.) URL: <http://conf.vntu.edu.ua/ipt/2013/>. (дата звернення: 04.06.2018)

9. Благодир Л. А., Швець В. О. Організація вчителем математики превентивної діяльності під час вивчення теми «Цілі вирази». *Проблеми математичної освіти* (ПМО-2013): матеріали міжнар. наук.-метод. конф. (Черкаси, 8-10.04.2013р.). Черкаси: ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2013. С. 56–57.

10. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Психолого-педагогічні умови формування мислення учнів на уроках математики. *Історія та методика викладання математики*: матеріали 15-ї міжнар. наук. конф. ім. акад. М. Кравчука, (15-17 травня 2014 р.). Київ: НТУУ «КПІ», 2014. Т. 4. С. 51.

11. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Формування методичної компетентності майбутнього вчителя математики. *Основні напрями підготовки сучасного вчителя: глобалізація, стандартизація, інтеграція*: матеріали міжнар. наук.-практ. конф., (30-31 жовтня 2014р.). Умань, 2014. С. 56–58.

12. Благодир Л. А. Задачі як засіб розвитку творчого мислення учнів на уроках математики. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу «ІТМ*плюс – 2015»*: матеріали II Міжнар. науково-метод. конф., (3–4 грудня 2015 р., м. Суми): у 3 ч. / упоряд. Чашечникова О. С. Суми: Мрія, 2015. Ч. 1. С. 16–18.

13. Благодир Л. А. Методична компетентність як складова професійної компетентності майбутнього вчителя математики. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., (26-27 листопада 2015р.) / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: Планер, 2015. С. 75–77.

14. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Дробові раціональні вирази». *Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики: тези доповідей міжнар. науково-практ. конф.: до 70-річчя кафедри математики і теорії та методики навчання математики НПУ імені М. П. Драгоманова*, (11-13 травня 2017 р.), Київ, 2017. С. 130–131.

15. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології в навчанні алгебри у загальноосвітній школі. *Інновації у вищій освіті: здобутки та перспективи*: тези доповідей міжнар. науково-практ. інтернет-конференції, (11 жовтня 2017, м. Умань), С.15–19.

16. Благодир Л. А., Благодир Ф. К., Стойка Г. П. Інформаційно-цифрова компетентність учителя як складова професійної компетентності. *Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики*: зб. наук. праць за матеріалами Міжнар. наук.-практ. конф., (30 травня–1 червня 2018р.) / М-во освіти і науки України, Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського [та ін.]. Вінниця: Нілан-ЛТД, 2018. С. 162–165.

17. Благодир Л. А. Коригування знань учнів шляхом використання ІКТ навчання. *Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах*: зб. наук. праць за матеріалами Всеукр. наук.-метод. конф. молодих науковців, (17-18 лют. 2011 р.). Кривий Ріг: Криворізький держ. пед. ун-т, 2011. С.113–116.

18. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Вчити учнів мислити. *Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики*: матеріали Всеукр. наук.-метод. конф., (3-4 грудня 2009 р., м. Суми). Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2009. С. 19–20.

19. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Застосування ІКТ при вивченні математики в школі. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання*: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., (23-24 травня 2014 р.). Умань, 2014. С.13–14.

20. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Програмні засоби навчального призначення на уроках математики. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання* : збірник матеріалів Всеукр. наук.-практ. інтернет-конф., (16-17 березня 2016 р.). Умань, 2016. С. 198–203.

21. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Формування інформаційної культури учасників педагогічного процесу. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання*: матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції, (м. Умань, 3-4 жовтня 2011 р.). Умань, 2011. С. 9–12.

22. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Використання ПМК ТерМ в роботі над математичними помилками учнів. *Актуальні проблеми підготовки вчителів природничо-наукових дисциплін для сучасної загальноосвітньої школи*: Всеукраїнська наук.-практ. конф., (м. Умань, 18-19 жовтня, 2012 р.). Умань, 2012. С. 23–27.

23. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Використання сучасних інформаційно-комунікаційних технологій на уроках математики. *Теоретичні та прикладні аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій у науці, освіті, економіці та у виробництві*: матеріали II Всеукраїнської науково-практичної Інтернет-конференції. Маріуполь, 2015. С. 22–25.

24. Благодир Л. А. , Благодир Ф. К. Належний розвиток критичного мислення на уроках математики як необхідна умова успішного навчання. *Матеріали IV Всеукраїнської науково-практичної конференції «Особистісно-орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи»*, (м. Полтава, 29-31 жовтня 2013 року). Полтава, 2013. С. 170–171.

25. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. ІКТ як засіб навчання та корекції знань. *Інформаційно-комунікаційні технології навчання*: матеріали Всеукраїнської наук.-практ. інтернет-конф. Умань, 2016. С. 14–16.

26. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. ІКТ як засіб попередження математичних помилок учнів. *Сучасні інформаційні технології в освіті та науці: тези доповідей II Всеукр. наук.-практ. конф. з міжнародною участю, (м. Житомир, 9-10 листопада 2017).* Житомир, 2017. С. 222–224.

27. Благодир Л. А. Принцип наступності в превентивній діяльності вчителя математики. *Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи: матеріали Всеукраїнської науково-практичної конференції: матеріали Всеукр. наук.-практ. конф., (м. Одеса, 15-16 вересня, 2016 р.).* Одеса. 2016. С. 53–56. URL: <http://difur.in.ua/wp-content/uploads/2016/12/TezyOdesa.pdf> (дата звернення: 23.05.2018).

ЗМІСТ

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ	16
ВСТУП.....	17
РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ.....	26
1.1.Стан проблеми дослідження в теорії і практиці навчання математики	26
1.1.1. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень	26
1.1.2. Помилки учнів у навчанні математики: практичний аспект	36
1.2. Превентивна діяльність у навчанні математики	44
1.2.1. Зміст та структура превентивної діяльності вчителя математики.....	46
1.2.2. Превентивна діяльність у навчанні математики: функції і принципи.....	62
1.3. Психологічні особливості учнів основної школи	69
1.4. Психолого-педагогічні передумови організації і здійснення превентивної діяльності у навчанні алгебри.....	77
1.4.1. Зміст типових алгебраїчних помилок учнів основної школи.....	77
1.4.2. Психолого-педагогічні чинники виникнення учнівських помилок під час вивчення алгебри	82
1.5. Психолого-педагогічні основи організації превентивної діяльності вчителя.....	92
Висновки до першого розділу	99
РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ПОПЕРЕДЖЕННЯ, ВИЯВЛЕННЯ ТА ВИПРАВЛЕННЯ ПОМИЛОК УЧНІВ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ	101
2.1. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії « Вирази і дії над ними»	101
2.1.1.Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Цілі вирази».....	102
2.1.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Рациональні вирази».....	137
2.2. Попередження, виявлення і виправлення типових помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності».....	148
2.2.1. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Рівняння».....	149

2.2.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Нерівності».....	163
2.3. Попередження, виявлення і виправлення типових помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Функції та їх графіки»	181
2.4. Інформаційно-комунікаційні технології як засіб коригування знань учнів з алгебри.....	196
2.5. Організація та проведення педагогічного експерименту.....	201
Висновки до другого розділу	214
ВИСНОВКИ.....	216
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	220
ДОДАТКИ.....	243

ПЕРЕЛІК УМОВНИХ СКОРОЧЕНЬ

ДПА – державна підсумкова атестація

ЗНО – зовнішнє незалежне оцінювання

ІКТ – інформаційно-комунікаційні технології

ІТ – інтерактивні технології

ОДЗ – область допустимих значень

ППЗ – педагогічні програмні засоби

НСЗ – найменший спільний знаменник

ВСТУП

Актуальність дослідження. На сучасному етапі розвитку суспільства, на шляху інтеграції України до Європейського простору, переході до ринкової економіки, що характеризується стрімким зростанням обсягу наукової інформації і високоінтелектуальними технологіями виробництва, демократичне суспільство вимагає від школи значних змін у підготовці школярів до життя. За нової парадигми освіти особливої важливості набуває проблема організації ефективної навчальної діяльності школярів. Це зумовлено тими змінами, які відбуваються в системі освіти України: взято курс на гуманізацію та демократизацію навчання, на формування особистості як найвищої соціальної цінності. В основу побудови змісту й організації процесу навчання математики покладено компетентісний підхід, відповідно до якого кінцевим результатом навчання є обізнаність та здатність учня успішно діяти в навчальних і життєвих ситуаціях і нести відповідальність за свої дії. За таких умов принциповим є питання позиції та місця кожного школяра у цілісному педагогічному процесі. Сьогодення потребує вдосконалення змісту, форм і методів навчальної діяльності і на цій основі створення та використання нових педагогічних технологій. Важливе місце в цьому посідає розвивальне та особистісно орієнтоване навчання, за якого активна пізнавальна діяльність учнів розглядається не тільки як засіб формування предметних компетентностей, а й як важливе джерело розумового розвитку особистості.

Нові вимоги суспільства, які характеризуються посиленням уваги до особистості школяра, до його саморозвитку та самопізнання, перебудова шкільної освіти, її перехід на якісно новий рівень, вимагає від учителів, методистів, науковців пошуку нових методичних систем, які забезпечили б сприятливі умови для досягнення учнями належного рівня сформованості компетентностей.

Відомо, що правильне і помилкове не існують одне без одного. У процесі становлення математичної освіти, на кожному етапі її розвитку під час навчання учнів математики спостерігаються помилки у засвоєнні ними навчального

матеріалу. Зі зміною змісту освіти зазнають змін як самі помилки, так і джерела їх виникнення.

У науково-методичній літературі пропонуються різні шляхи вдосконалення навчального процесу, використовуються нові методики та сучасні технології навчання, однак аналіз практики навчання математики, результати ДПА та ЗНО свідчать про те, що робота над помилками учнів є проблемною зоною в організації навчальної діяльності. Удосконалення програм, нові підходи до навчання, нові підручники, як свідчить практика, не викорінюють автоматично математичні помилки учнів. Ось чому ця проблема і на сучасному етапі розвитку освіти потребує належної уваги методистів та педагогів-практиків. Особливо важливе значення має попередження помилок учнів, яке повинно ґрунтуватися на знаннях учителем особливостей засвоєння учнями навчального матеріалу, змісту типових помилок, яких припускаються учні, розумінні причин їх появи. Адже кожна помилка, свідчить про недостатній рівень засвоєння відповідного навчального матеріалу. Допущена одного разу, вона може знову повторитись, а неправильне розуміння учнем навчального матеріалу, усталитись.

Попередження можливих математичних помилок учнів, аналіз і виправлення допущених помилок повинні розглядатися як важливий складник навчального процесу, спрямований на засвоєння міцних і глибоких знань з математики. Аналіз помилок у навчанні математики допомагає правильно оцінити причини неуспішності, осмислити те, що помилки виникають не тільки від небажання вчитись чи від неспроможності учнів, але й від недоліків методики навчання, ігнорування учителем дій, спрямованих на розвиток творчого та критичного мислення школярів, формування навичок самоконтролю та самокорекції, глибоке розуміння учнями матеріалу, що вивчається. Учитель має справу з різними помилками учнів і, звичайно, він повинен знати причини їх появи, орієнтуватися в психологічній природі помилок, вміти правильно і своєчасно попереджати та виправляти їх. Під час ефективної роботи над помилками з'являється можливість глибшого засвоєння навчального матеріалу, кращого осмислення структури математичних тверджень, методів побудови доведень, формування здатності до

використання та самостійного створення алгоритмічних приписів, правил-орієнтирів, блок-схем до розв'язування типових математичних задач тощо.

У зв'язку з реалізацією ідей гуманізації та гуманітаризації освіти спостерігається тенденція до скорочення годин на вивчення предметів природничо-математичного циклу. Тому особливо гостро постає питання підготовки сучасного висококваліфікованого вчителя математики, який зможе ефективно, якісно і швидко реагувати на всі зміни в навчальному процесі, науково й методично грамотно організовувати навчальну діяльність учнів, спрямовану на успішне опанування знаннями з найменшою кількістю помилок.

Помилки учнів та робота над ними постійно знаходяться в полі зору психологів, методистів, педагогів, учених-математиків. Психологічний аналіз виникнення математичних помилок учнів розглядається в роботах Д. М. Богоявленського [34, 35], Н. О. Менчинської [163], Я. Й. Грудьонова [70, 72], П. О. Шеварьова [263, 264], Г. А. Маделяна [148] та ін.

Окремим питанням попередження учнівських помилок присвячені дисертаційні дослідження С. І. Зенько [105], І. М. Кирилецького [118], Д. А. Скрипника [229], О. А. Тарасової [242], Л. П. Черкаської [257].

У роботах Р. А. Асанова [4, 5], І. М. Кирилецького [118], В. О. Колосової [119], даються рекомендації вчителям щодо виправлення помилок.

У дослідженнях А. К. Артемова [6], В. М. Брадїса [40], Г. П. Бевза [12], С. І. Векслера [47], В. О. Далінгера [77, 79], О. С. Дубинчук [88], А. Т. Муханова [175], В. І. Рижика [214] З. І. Слєпкань [230], О. А. Тарасової [242], Л. П. Черкаської [257] та інших розглянуті різні аспекти методичної роботи над математичними помилками учнів.

На нашу думку, подолання протиріччя між необхідністю недопущення помилок учнів та його реалізацією в практиці навчання математики, можливе через використання методичної системи, яка б базувалась на результатах вивчення причин утворення та способів коригування певних помилкових дій.

Відсутність науково обгрунтованої методики виявлення причин появи типових математичних помилок, їх попередження та виправлення, труднощі, які

відчувають учителі під час роботи над помилками учнів, актуальність проблеми та її недостатня розробленість зумовили вибір теми дисертаційного дослідження: **«Методична система аналізу та попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі».**

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Дослідження виконано відповідно до теми науково-дослідної роботи кафедри вищої математики та методики навчання математики Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини «Система організації навчання майбутніх учителів математики в умовах реалізації педагогічних інновацій» (номер державної реєстрації 011611006437). Тема дисертації затверджена на засіданні вченої ради Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини (протокол № 8 від 23 березня 2009 р.) та узгоджена з Міжвідомчою радою з координації наукових досліджень з педагогічних і психологічних наук в Україні (протокол № 3 від 28 квітня 2009 року).

Об'єкт дослідження – процес навчання математики в основній школі.

Предмет дослідження – форми, методи, прийоми та засоби попередження та виправлення типових помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі.

Мета дослідження – розробити, теоретично обґрунтувати та експериментально перевірити методичну систему попередження математичних помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі.

Відповідно до мети визначено такі **завдання дослідження**:

1. Проаналізувати сучасний стан проблеми дослідження, вивчити науково-методичну та психологічну літературу, виокремити психолого-педагогічні причини виникнення типових математичних помилок учнів.

2. Визначити структуру, зміст, функції та принципи превентивної діяльності, спрямованої на попередження типових помилок учнів.

3. Систематизувати типові математичні помилки у процесі вивчення алгебри за змістовими лініями: вирази і дії над ними, рівняння та нерівності, функції і їх графіки.

4. Дібрати ефективні методи, засоби і форми навчальної роботи з алгебри в основній школі в умовах превентивної діяльності.

5. Здійснити експериментальну перевірку ефективності створеної методичної системи попередження математичних помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі.

У процесі дослідження для розв'язання поставлених завдань на різних етапах наукового пошуку був застосований комплекс загальнонаукових та спеціальних **методів**: *теоретичні*: аналіз психолого-педагогічної, навчально-методичної, наукової літератури, нормативних документів у контексті дослідження (тут і далі – підрозділи дисертації 1.1, 1.2); з'ясування психолого-педагогічних особливостей учнів основної школи (1.3), теоретичне проєктування та моделювання психолого-педагогічних основ організації превентивної діяльності на уроках алгебри (1.4, 1.5.); *емпіричні*: педагогічні спостереження в ході проходження педагогічної практики студентами УДПУ імені Павла Тичини; обговорення проблеми з учителями шкіл міста Умань у процесі проведення семінарів та круглих столів, зі студентами індивідуальної та заочної форм навчання УДПУ імені Павла Тичини, які працюють в закладах освіти; анкетування, тестування, вивчення педагогічного досвіду вчителів математики Черкаської, Одеської та Кіровоградської областей; аналіз помилок з алгебри, яких припускалися учні під час написання ДПА та ЗНО; методи *статистичного* аналізу отриманих даних та якісної інтерпретації результатів дослідження (2.5).

Методологічною основою дослідження є концептуальні положення теорії пізнання, асоціативно-рефлекторної теорії навчання, концепція навчальної діяльності, теорія особистісно орієнтованого навчання, теорія розвивального навчання, теорія поетапного формування розумових дій, положення дидактики та методики навчання математики про системний та комплексний підхід до вивчення математики, сучасні концепції розвитку шкільної математичної освіти, теоретичні основи підготовки і проведення сучасного уроку.

Законодавчу базу дослідження становлять: основні положення законів України «Про освіту», «Про загальну середню освіту», Концепції Нової

української школи, Державного стандарту базової і повної загальної середньої освіти, Національної стратегії розвитку освіти в Україні на період до 2021 року.

Наукова новизна дослідження полягає в тому, що:

- *уведено нове поняття* «превентивна діяльність учителя» на уроках математики та визначено основні структурні компоненти такої діяльності;
- *обґрунтовано*, що в умовах особистісно орієнтованого навчання математики, мова може йти про превентивну діяльність учнів, яка планується, організовується і коректується вчителем;
- *виокремлено знання та уміння*, що визначають одну із складових професійної культури вчителя математики – превентивну культуру;
- *виявлено, проаналізовано, систематизовано та згруповано* за змістовими лініями помилки, які допускають учні у навчанні алгебри в основній школі;
- *розроблено* методичну систему попередження математичних помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі за змістовими лініями: вирази і дії над ними; рівняння та нерівності; функції і їх графіки.

– **Практичне значення дослідження.** Досліджено типові помилки учнів, яких вони припускаються під час вивчення алгебри в основній школі, здійснено психологічний аналіз причин появи таких помилок, розроблено методичну систему попередження типових учнівських помилок, експериментально підтверджено ефективність своєчасного попередження типових помилок учнів.

Матеріали дослідження зможуть використовувати вчителі математики у навчанні учнів алгебри в основній школі, викладачі педагогічних закладів вищої освіти на заняттях з методики навчання математики, елементарної математики, шкільного курсу математики, фахівці, які займаються підвищенням кваліфікації учителів.

Вірогідність і обґрунтованість результатів дослідження забезпечена: теоретико-методологічними основами дослідження, аналізом значного обсягу теоретичного та емпіричного матеріалу, відповідністю дослідження його меті і завданням, результатами педагогічного експерименту.

Особистий внесок здобувача. У працях, опублікованих у співавторстві, дисертантові належать такі здобутки: аналіз інформаційно-комунікаційних засобів навчання, які можна використовувати в роботі з математичними помилками учнів, аналіз наукової, методичної, психолого-педагогічної літератури та результатів дисертаційних досліджень з проблеми математичних помилок учнів, вивчення стану проблеми дослідження в практиці навчання алгебри, введення поняття превентивна культура вчителя математики та визначення складових превентивної культури педагога, введення поняття превентивної діяльності на уроках алгебри, розробка змісту та структури такої діяльності, виокремлення функцій та принципів превентивної діяльності вчителя математики, визначено засоби та методичні прийоми формування вмінь і навичок превентивної діяльності майбутнього вчителя математики. Особистий внесок дисертанта у працях, опублікованих у співавторстві, становить понад 60%.

Результати дослідження упроваджено в навчальний процес закладів загальної середньої освіти. Апробація й упровадження результатів дослідження здійснювалися в процесі експериментального навчання математики учнів в Уманській ЗОШ I-III ступенів № 3 Уманської міської ради Черкаської області (дов. № 105 від 06.02. 2019р), Уманській ЗОШ I-III ступенів № 9 Уманської міської ради Черкаської області (дов. № 1 від 15.11.2018р), Уманській ЗОШ I-III ступенів № 14 Уманської міської ради Черкаської області (дов. № 47 від 17.10. 2018р), ОНЗ Савранський НВК «ЗОШ I-III ст. – ДНЗ», Одеської області (дов. № 1080 від 21.11. 2018р), Благовіщенському НВК № 1, Кіровоградської області (дов. № 435 від 19.12. 2018).

Апробація результатів дослідження. Основні результати дисертації оприлюднені й обговорені на:

– *міжнародних науково-методичних конференціях* («Проблеми математичної освіти» (Черкаси 2009, 2013), «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання дисциплін природничо-математичного циклу» (Суми, 2011, 2015), «Евристика і дидактика»(Донецьк, 2011), «Інноваційні педагогічні технології у підготовці майбутніх фахівців з

вищою освітою: досвід, проблеми, перспективи» (Вінниця, 2013), «Інновації в освіті. Здобутки та перспективи» (Умань, 2017)); *науково-практичних конференціях* («Проблеми та перспективи фахової підготовки вчителя математики» (Вінниця 2012, 2015, 2018), «Актуальні проблеми теорії і методики навчання математики» (Київ, 2011, 2017), «Основні напрями підготовки сучасного вчителя: глобалізація, стандартизація, інтеграція» (Умань, 2014), «Інновації у вищій освіті: здобутки та перспективи» (Умань, 2017)); *наукових конференціях* «Дванадцята міжнародна наукова конференція імені академіка М. Кравчука», (Київ, 2008), «14-та міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука» (Київ, 2012), «П'ятнадцята міжнародна наукова конференція ім. акад. М. Кравчука» (Київ, 2014));

– *всукраїнських науково-методичних конференціях* («Інноваційні інформаційно-комунікаційні технології навчання математики, фізики, інформатики у середніх та вищих навчальних закладах» (Кривий Ріг, 2011), «Розвиток інтелектуальних умінь і творчих здібностей учнів та студентів у процесі навчання математики» (Суми, 2009); *науково-практичних конференціях* («Інформаційно-комунікаційні технології навчання» (Умань, 2011), «Актуальні проблеми підготовки вчителів прорідничо-наукових дисциплін для сучасної загальноосвітньої школи» (Умань, 2012), «Теоретичні та прикладні аспекти використання математичних методів та інформаційних технологій у науці, освіті, економіці та у виробництві» (Маріуполь, 2015), «Особистісно орієнтоване навчання математики: сьогодення і перспективи», (Полтава, 2013), «Інформаційно-комунікаційні технології навчання» (Умань, 2016), «Реалізація наступності в математичній освіті: реалії та перспективи» (Одеса, 2016), з міжнародною участю «Сучасні інформаційні технології в освіті та науці» (Житомир, 2017).

Результати наукового пошуку представлено на Всеукраїнському науково-методичному семінарі кафедри математики і теорії та методики навчання математики Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова «Актуальні проблеми методики навчання математики» (Київ, 2011, 2019).

Публікації. Основні результати дослідження висвітлено у 39 працях, серед них: 12 статей у фахових виданнях (6 одноосібних, 3 з них індексується в Index Copernicus), 3 статті у зарубіжних виданнях; матеріали і тези конференцій – 27.

Структура роботи. Дисертація складається зі вступу, двох розділів, висновків до кожного розділу, загальних висновків, списку використаних джерел, додатків. Основний зміст дослідження викладено на 206 сторінках. Загальний обсяг дисертації 269 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ПРЕДМЕТ І ТЕОРЕТИЧНІ ОСНОВИ ДИСЕРТАЦІЙНОГО ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Стан проблеми дослідження в теорії і практиці навчання математики

Нові вимоги суспільства, що характеризуються посиленням уваги до особистості школяра, до його саморозвитку та самопізнання, перебудова шкільної освіти, її перехід на якісно новий рівень вимагає від учителів, методистів, науковців пошуку нових методичних систем, які забезпечили б сприятливі умови для досягнення учнями результатів навчання, визначених Державним стандартом базової й повної середньої освіти. Попередження можливих математичних помилок учнів, аналіз і виправлення допущених повинні розглядатися як невіддільна складова частина навчального процесу, спрямована на засвоєння міцних і глибоких знань.

1.1.1. Математичні помилки учнів як об'єкт наукових досліджень

Щоб успішно навчати математики кожен учитель має знати, чому і як навчати, вміти організувати навчальну діяльність учнів так, щоб кожен з них став активним учасником навчально-пізнавального процесу, здатним застосовувати на практиці набуті знання і вміння.

Проблема виявлення та попередження математичних помилок учнів знаходить своє відображення в працях учених-математиків, психологів і педагогів упродовж всієї історії розвитку математичної освіти. Зокрема означена проблема порушувалася в роботах Г. А. Асанова [4, 5], Г. П. Бевза [12], В. М. Брадїса [40], Я. Й. Грудьонова [72], В. О. Далінгера [77, 79], С. І. Зенько [105], І. М. Кирилецького [118], В. О. Колосової [119], Н. О. Менчинської [163], З. І. Слєпкань [230, 231], О. А. Тарасової [242], П. О. Шеварьова [264] та ін.

Ще давні греки цікавились математичними помилками софістичного характеру. Систематичним їх вивченням займались Д. Гільберт, Г. Кантор, Б. Паскаль та ін.

Пояснення походження типових математичних помилок та причин їх виникнення з позиції асоціативно-рефлекторної теорії навчання дається в роботах П. О. Шеварьова [263, 264]. Автор вважає, що, аналізуючи математичні помилки та шукаючи шляхи їх попередження та виправлення, необхідно враховувати психологічні причини утворення помилкових асоціацій у свідомості учнів. Помилковою є думка, що розв'язування складного завдання зводиться до послідовного розв'язування низки простих задач. Адже, під час розв'язування простих вправ, які не включають ніяких інших алгебраїчних дій, не входять до складу складніших, конкретне завдання завжди вказане учню. Разом з тим, під час розв'язування простих вправ, що входять до складу складніших, деякі або навіть усі конкретні операції, що входять у ці прості вправи, повинні виникнути в свідомості учня через актуалізацію знань, які він має. Досліджуючи процес міркування учнів під час розв'язування алгебраїчних задач, вчений обґрунтував важливий висновок про те, що по мірі опанування процесом математичних міркувань, вміннями та навичками, під час розв'язування математичних задач учні перестають осмислювати те чи інше правило, діючи згідно з ним. Автор виходить із положення про те, що аналіз причин неправильних дій учнів є неповним без аналізу процесу правильного розв'язання задачі. Порівняння цих дій дає можливість встановити, чому саме допущено помилку, де сформувалась помилкова асоціація чи порушена міцність всіх ланок правильної асоціації. На думку П. О. Шеварьова, необхідність наявності контролюючої асоціації виключає появу помилкової асоціації, тобто при належній організації контролю знань помилка учнем не буде допущена.

Зокрема, П. О. Шеварьовим детально проаналізовано процеси мислення під час множення степенів з однаковою основою, причини виникнення помилок під час піднесення степеня до степеня, скорочення дробів, винесення множника з-під знака кореня. При цьому автором зроблені такі важливі висновки:

– під час розв'язування алгебраїчних вправ значне місце займають узагальнені асоціації, які відмінні від раніше відомих константних (постійних);

– будь-яка помилка може з'явитися або під час актуалізації деякої помилкової асоціації, або коли правильна асоціація актуалізується не повністю.

Аналогічний підхід до пояснення помилок знаходимо у А. К. Артемова [6]. Аналізуючи причини помилкових дій, автор приходить до висновку, що:

– причиною систематичних помилок є формування і актуалізація помилкових асоціацій;

– помилкова асоціація часто виникає і закріплюється непомітно, оскільки протягом довгого часу вона може ніяк не виявлятися і залишатися непоміченою.

Помилки, що допускаються учнями у навчанні математики дослідник поділяє, в залежності від частоти їхньої появи, на **систематичні** та **випадкові**. До **випадкових** відносить нестійкі помилки, поява яких є одноразовою, вони характерні для декількох учнів класу. До **систематичних** – такі, які з'являються неодноразово, або одноразово, але у багатьох учнів класу. Систематичні помилки А. К. Артемов пропонує класифікувати, враховуючи причини їх виникнення. На думку дослідника, це дозволяє вибрати і систематизувати необхідні методи і прийоми навчання, спрямовані на попередження можливих помилок. А також цілеспрямовано організовувати роботу з виправлення допущених помилок. На нашу думку, поділ на систематичні та випадкові помилки слід вважати умовним. Адже, в одного вчителя, який не виділив належною мірою яку-небудь властивість під час формування певного поняття, помилку пов'язану з даною властивістю можуть допустити багато учнів, в іншого – її може допустити тільки один учень і тільки один раз.

Відомий психолог Н. О. Менчинська [163], помилки, які допускають учні під час обчислень виокремлює в групи залежно від причин, які сприяють тому, що з'являються помилки. Автор виділяє дві групи помилок:

– механічні помилки, які виникають в результаті втомленості, втрати інтересу, неуважності та надмірної завантаженості;

– помилки, які допускаються в результаті неякісного засвоєння нового матеріалу.

Досліджуючи помилки учнів з математики, Н. О. Менчинська [163] прийшла до висновку, що **причини помилок різні, тому різними повинні бути шляхи їх виправлення та способи попередження**. Ми поділяємо таку точку зору науковця.

Також погоджуємося з поглядами психологів, які закономірно вважають, що для того, щоб навчити учнів аналізувати і виправляти помилки, їх необхідно насамперед навчити прийомам аналізу і синтезу, порівняння, протиставлення, узагальнення та іншим розумовим діям, і вважаємо, що дієвим засобом в боротьбі з помилками є саме розвиток мислення учнів.

Психолого-дидактичний аналіз помилок школярів, виявлення причин виникнення та шляхи їх попередження й усунення здійснила З. І. Слєпкань [230]. Науковець вважає, що джерелом помилок є послаблення психічних функцій (уваги, пам'яті, мислення), втома, нервовість, поспішність у роботі. В усуненні цих джерел помилок, важлива роль відводиться діяльності вчителя, який повинен забезпечити мотивацію вивчення того чи іншого навчального матеріалу, вдосконалювати методи і форми організації навчання, розвивати пізнавальні інтереси школярів, активізувати їхню пізнавальну діяльність на уроці та під час виконання домашніх завдань. З. І. Слєпкань висловлює думку, що: «Типові помилки допускаються частиною учнів навіть за вдалого пояснення вчителя, який акцентує увагу на цих помилках. Це пов'язано насамперед з тим, що людська свідомість, як правило, об'єктивно не в змозі охопити всі сторони явища. Але й допущену учнем помилку вчитель повинен використати для поглибленого розуміння школярами математичних фактів і закономірностей»[230, с.177].

Автор виділяє: а) *помилки в обчисленнях*; б) *помилки в тотожних перетвореннях виразів*; в) *помилки під час розв'язування рівнянь і нерівностей*; г) *помилки в доведеннях математичних тверджень*.

Погоджуємося з позицією З. І. Слєпкань, що у процесі аналізу математичних помилок, у пошуку шляхів їх попередження та виправлення слід враховувати

психолого-педагогічні закономірності організації навчального процесу. Зокрема закономірності засвоєння навчального матеріалу, розвитку уваги.

В. Г. Прочухаєв у своїх дослідженнях розглядав різні помилки з арифметики, алгебри та тригонометрії, зокрема він відзначав певну стійкість допущених помилок, які складно викорінюються у процесі подальшого навчання. Автор класифікував помилки відповідно до розділів програми, що було цінним для вчителів того часу. На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти змінено програми, а, отже, потребують змін і окремі рекомендації щодо роботи з помилками.

В. І. Рижик [214] дотримується точки зору, що на помилках вчать незалежно від того, свої вони чи чужі. Автором виділено *технічні, логічні помилки та недоліки*.

О. Ф. Сичиков також розглядає помилки учнів з математики та пропонує певну роботу з їх попередження. Вважаючи однією з основних причин появи помилок – формалізм у знаннях, А. Ф. Сичиков виділяє такі його особливості: *а) відрив форми від змісту; б) відрив теорії від практики; в) запам'ятовування без розуміння*. Водночас, необхідно зазначити, що, приділяючи значну увагу розкриттю змісту помилок, автор не ставить задачу пояснення причин помилок та організації навчальної діяльності з їх виправлення.

У дисертаційних дослідженнях Д. О. Скрипника [229] та О. А. Тарасової [242] розглядаються математичні помилки в міркуваннях учнів, пропонуються окремі шляхи їх попередження та виправлення.

Д. О. Скрипник [229] групує помилки за логічними формами: *а) помилки в тлумаченні понять; б) помилки в логічних діях; в) помилки в доведеннях*.

На думку автора, розгляд зазначених груп сприяє розробці загальних прийомів виправлення будь-якої логічної помилки, а також використання помилок як засобів їх попередження у майбутньому. З цією метою в дослідженні Д. О. Скрипника приділяється значна увага методиці використання контрприкладів та кругів Ейлера-Венна.

О. А. Тарасова [242] досліджує можливості організації роботи учнів над типовими математичними помилками, використовуючи засіб дослідницько-коригувального прийому і спеціально складеної системи задач, з метою формування і розвитку рефлексивної діяльності учнів, що на думку автора, сприяє підвищенню якості алгебраїчних знань. Дослідження з проблеми психологічних основ роботи над помилками, дозволили автору визначити корекційні дії:

- *фіксування уваги учня на помилці;*
- *виявлення причини помилки;*
- *виявлення необхідної коректувальної дії;*
- *застосування відкорегованих знань і дій у процесі розв'язування аналогічних задач.*

Однак побудувати таку систему дій може тільки той учень, який усвідомлює зміст своїх думок, може пояснити кожную свою дію, тобто володіє в деякій мірі розвиненою рефлексивною діяльністю.

Р. А. Асанов [4, 5] вважає, що в роботі з математичними помилками школярів важливе значення має систематизація допущених помилок та робота над ними. При цьому важливу роль повинні відігравати не окремі приклади помилок, а групи помилок, об'єднаних спільністю причин їх виявлення та спільністю роботи над ними. У дисертаційному дослідженні автор пропонує таку систематизацію помилок:

- *помилки, що є наслідком недостатньої логічної підготовки учнів;*
- *помилки і недоліки, обумовлені неувагою до формування теоретико-множинних уявлень учнів;*
- *помилки, які допускаються учнями під час узагальнення і конкретизації;*
- *помилки, які виникають в результаті використання неправильних аналогій;*
- *помилки, які допускають учні через відсутність самоконтролю.*

Значну увагу автор приділяє певним загальним методам роботи над помилками, що особливо корисно знати вчителям-початківцям:

- а) *формування навичок самоконтролю;*

б) чітке здійснення зворотного зв'язку;

в) керівництво самотійною роботою;

г) навчання учнів умінню виявляти помилки і аргументовано пояснювати зміст допущених помилок.

Будь-яка помилка, як вважає Р. А. Асанов, може і повинна бути використана для глибшого проникнення в зміст кожного правила, поняття, теореми. Висновки зроблені дослідником вважаємо цінними та актуальними в роботі з помилками учнів.

Аналізуючи причини стійких помилок при вивченні функцій, І. А. Марнянський [157] виділяє окремі особливості мислення школярів (прагнення до узагальнення та схильність до стереотипів, перевага конкретного мислення і труднощі переходу від абстрактного до конкретного, суттєвий вплив сформованих раніше уявлень на засвоєння нових понять тощо), вважаючи, що певні особливості мислення стимулюють виникнення помилкових уявлень в тих випадках, коли завдяки недосконалості методики навчання можлива помилка закріплюється.

Основну увагу автор приділяє аналізу: а) *помилкового розуміння «суттєвих ознак» поняття функції*; б) *помилкових уявлень, що виникають під час вивчення поняття границі*, при цьому зовсім не досліджуючи помилки в прикладах на обчислення границь, тотожних перетвореннях виразів, що містять тригонометричні функції тощо.

Розглядаючи стійкі помилки в математичній підготовці випускників середніх шкіл, А. Т. Муханов [175] в основу систематизації покладає декілька незалежних принципів і виділяє такі групи математичних помилок: *перша – помилки, обумовлені нерозумінням суті математичного доведення; друга – помилки, які допускаються учнями через низький рівень володіння математичною мовою; третя група – помилки, що є наслідком відсутності необхідних навичок.*

Причини виникнення та технологію подолання типових математичних помилок досліджував у своїй роботі В. О. Далінгер [77, 78]. Автор вважає за необхідне в кожній помилці розрізняти *зміст* та *причину*. Зміст явно виражений, а

причина, як правило, зовні не проявляється. В. О. Далінгер виділив три групи причин, що сприяють виникненню математичних помилок:

- *причини обумовлені недосконалістю організації навчального процесу;*
- *причини, пов'язані з психологічними чинниками;*
- *причини, пов'язані з недоліками програм, підручників, навчальних посібників.*

На нашу думку, ***поділ математичних помилок учнів на такі групи є суттєвим та актуальним.***

Аналізу помилок учнів під час вивчення геометрії присвячені дисертаційні дослідження Дж. Ікрамова [110] та Г. В. Григоряна [69]. Дж. Ікрамов вивчав стійкі помилки, які допускають учні під час розв'язування геометричних задач на доведення. В роботі Г. В. Григоряна досліджено причини виникнення та запропоновано методику попередження помилок у процесі вивчення геометричного матеріалу в IV-V класах. Автор приділяє суттєву увагу аналізу знань, умінь та навичок учнів, які вони повинні опанувати під час вивчення геометричного матеріалу. На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти змінено програми, а отже, потребують змін і окремі рекомендації щодо роботи з помилками учнів.

Причини виникнення математичних помилок з позиції асоціативно-рефлекторної теорії навчання П. О. Шеварьова та їх систематизацію в курсі алгебри і початків аналізу здійснив у своєму дисертаційному дослідженні І. М. Кирилецький [118]. Автор дотримується тематичного принципу систематизації помилок, що, на нашу думку, зручно в практичному застосуванні і під час вивчення алгебри.

У дисертаційному дослідженні В. О. Колосової [119] обґрунтовано переваги застосування діяльнісного підходу до дослідження математичних помилок учнів 5-6 класів шкіл Росії. Автор так класифікує помилки учнів: *обчислювальні помилки; помилки в записах; мовленнєві помилки; помилки в перетвореннях; помилки в геометричних побудовах; логічні помилки.* Однак, причинам виникнення помилок в роботі приділено незначну увагу.

Методико-психологічний аналіз математичних помилок здійснив Д. М. Майєргойз [151], акцентуючи увагу на описах, помилках внаслідок передчасної автоматизації математичних операцій та невдалого добору вправ, помилках, що є наслідком інтерференції тощо. В основу своєї класифікації автор покладає не причини математичних помилок, а їх зовнішній прояв. На нашу думку, в помилках учнів важливо розглядати саме причини їх появи.

У дисертаційному дослідженні С. І. Зенько [105] особлива увага приділяється розробці комплексної методики превентивної діяльності вчителя математики для попередження математичних помилок учнів 5-7 класів шкіл Білорусії.

У позакласній роботі з математики й сьогодні широко використовується робота В. М. Брадїса, В. Л. Мінковського, К. А. Харчевої «Ошибки в математических рассуждениях» [40]. Констатуючи факт появи різних помилок в математичних міркуваннях, автори вважають корисним ознайомлювати учнів з такими помилками з двох причин: 1) *грунтовне знайомство з помилкою застраховує від її повторення в майбутньому*; 2) *процес виявлення помилки легко зробити захопливим, що може стати засобом підвищення інтересу до вивчення математики*.

Особлива увага в роботі приділяється уведенню математичних софізмів. На думку авторів, математичні софізми повинні використовуватись для перевірки рівня засвоєння і закріплення певного матеріалу. На нашу думку, софізми є одним із ефективних засобів попередження помилок. Встановлюючи, в чому полягає допущена в міркуваннях помилка і як її виправити, учні, яким це складно, насамперед відчують прогалини в знаннях та осмислюють необхідність володіння такими знаннями.

З багаторічного досвіду роботи в школі відомо, що іноді через пояснення помилки можна навчити більше, ніж навіть при правильному виконанні завдань за зразком. Але поряд з цим надзвичайно важливе значення має встановлення причин виникнення помилок, що сприяє розробці ефективних методів їх попередження та виправлення.

Викладений вище огляд досліджень показує, що проблема вивчення помилок є актуальною в різних галузях наукового знання. У методичній літературі та дисертаційних дослідженнях з методики навчання математики здійснювались спроби систематизувати, класифікувати та об'єднувати в окремі групи помилки учнів у навчанні математики. Основою для систематизації математичних помилок школярів дослідниками протягом певного часу обирались різні підходи: тематичний (навчальна тема, під час вивчення якої з'являються помилки – І. М. Кирилецький, А. В. Самусенко, О. А. Тарасова); причинний (причина виникнення помилки – В. О. Далінгер, С. І. Зенько, І. М. Кирилецький, Д. М. Майергойз); діяльнісний (вид навчально-пізнавальної діяльності, під час якої допускаються помилки – В. О. Колосова, З. І. Слєпкань, Г. Н. Скобєлєв); кількісний (кількість учнів, що допустили помилку – Д. С. Ангелов, А. Т. Муханов), предметний (зміст помилки – Р. А. Асанов, В. І. Рижик); психологічний (Б. Г. Ананьєв, Д. Н. Богоявленський, В. Літцман).

У проаналізованих нами дослідженнях автори розглядали помилки учнів під час вивчення деяких розділів математики, виявляли зміст цих помилок, систематизували та групували, використовували різні підходи до пояснення причин появи математичних помилок, розробляли методики їх виправлення.

Разом з тим, проблема запобігання, попередження та недопущення математичних помилок учнів у навчанні алгебри в основній школі не досліджувалась.

На уроках математики, зокрема алгебри в основній школі, вчитель має справу з різноманітними помилками учнів, які повинен вміти вчасно попереджати, виявляти й виправляти. Одним із аспектів забезпечення якісної математичної підготовки школярів є вдало організована робота над прогалинами в знаннях.

Зі зміною змісту та умов освіти змінюються як самі помилки учнів, так і причини їх виникнення. Домогтися повної ліквідації помилок, звичайно, неможливо, але їх кількість можна звести до мінімуму, якщо проводити систематичну роботу по запобіганню і виправленню допущених помилок. Кожна

допущена учнем помилка, якщо своєчасно не виправлена, породжує нові, а це у свою чергу змушує учня надалі опановувати новий матеріал з певними прогалинами, що призводить згодом до повного незрозуміння теоретичного матеріалу та невміння використовувати його під час розв'язування задач. Якщо цілеспрямовано проводити роботу з помилками учнів, то з'являється можливість глибшого засвоєння матеріалу, кращого осмислення математичних понять і їх властивостей, методів побудови доведень. Свідомому засвоєнню математичних знань сприяє вдумливий аналіз учнем допущеної помилки, причини її виникнення та теоретичне осмислення змісту помилки. Кожну допущену учнем математичну помилку необхідно використовувати для глибшого засвоєння правила, поняття, твердження, способу, методу. Аналіз власних і чужих помилок розвиває в учнів навички самоконтролю, критичного підходу до власних дій та дій однокласників. Це сприяє формуванню більш критичного мислення, а дії стають більш обгрунтованішими, виваженішими, осмисленішими.

З метою удосконалення роботи над помилками учнів у навчанні алгебри в основній школі, вважаємо доцільним *дослідити проблему попередження помилок учнів в умовах причинного підходу, з точки зору поділу навчального матеріалу на змістові лінії: вирази і дії над ними, рівняння та нерівності, функції і їх графіки.*

Недопущення прогалин у знаннях учнів курсу алгебри основної школи сприятиме успішному вивченню названих змістових ліній у профільних класах старшої школи.

1.1.2. Помилки учнів у навчанні математики: практичний аспект

Процес опанування навчального матеріалу з алгебри в системі шкільної математичної освіти побудований за принципом концентризму. Рівень і якість засвоєння навчального матеріалу на нижчому рівні є передумовою розуміння наступних наукових знань. Якщо на нижчих рівнях навчання з тих чи інших причин трапилися прогалини, то буде порушена міцність спіралеподібної структури учіння. Тому дуже важливо своєчасно виявляти прогалини в знаннях учнів на кожному етапі вивчення математики, завчасно усувати їх.

У навчанні, як і в багатьох інших сферах практичної діяльності людини, підвищення ефективності роботи, досягнення вищих результатів, визначається, як правило, не одноразовим використанням певного методичного прийому чи дидактичного засобу, а цілеспрямованим багаторазовим їх застосуванням протягом певного часу й у визначеній методичній системі. Це певною мірою торкається і роботи з математичними помилками школярів. Якщо така робота проводиться епізодично, безсистемно, тоді користь від неї буде незначною. Зовсім інших результатів можна досягти, якщо всі складові методичної системи роботи над помилками учнів органічно поєднати у процесі організації навчальної діяльності школярів.

Оновлення змісту освіти, компетентісний підхід у навчанні учнів, створення нових освітніх стандартів, особливості розумового розвитку сучасного підлітка, зміна критеріїв оцінювання знань, умінь та навичок учнів, введення нових форм та засобів контролю потребують нового підходу як до формування особистості учня, організації його навчально-пізнавальної діяльності, так і до роботи над помилками, які він допускає, зокрема під час вивчення алгебри в основній школі.

Підготовка майбутніх учителів математики у закладах вищої освіти ґрунтовно розкрита в роботах Г. П. Бевза, О. С. Дубинчук, З. І. Слєпкань Я. Й. Грудьонова, В. М. Монахова, А. А. Столяра та інших методистів. Проте організації діяльності майбутніх учителів математики з попередження математичних помилок учнів приділена недостатня увага

Для виявлення та розробки можливих аспектів методичної роботи над помилками учнів нами був проведений констатувальний (2009-2011pp.) експеримент, в якому брали участь 178 учителів математики Черкаської, Одеської та Кіровоградської областей. Серед них 10% учителів мали педагогічний стаж до 10 років, 43% – від 10 до 20 років, 47% – більше 20-ти років. Щодо категорій, то серед них «спеціалісти» та ті, хто мав другу кваліфікаційну категорію – 12% учителів, перша кваліфікаційна категорія – 39%, вища – 49% учителів.

З метою вивчення практичного досвіду з проблем аналізу, виявлення та попередження математичних помилок учнів у процесі вивчення ними алгебри в

основній школі здійснювалися цілеспрямовані педагогічні спостереження: обговорювалися ситуації з означеної проблеми, проводилися порівняльні аналізи контрольних робіт учнів різних класів, бесіди, анкетування, інтерв'ювання директорів, їх заступників, учителів, учнів, студентів-практикантів, студентів заочної та дистанційної форм навчання.

Результати анкетування показали, що 70% опитаних учителів математики проводять постійно роботу над помилками, і, в основному, під час виконання учнями завдань біля дошки та за результатами контрольних робіт. Тільки 15% з них відзначили, що організовують цю роботу за певною системою з урахуванням науково обґрунтованих рекомендацій. Стосовно останніх 30% опитаних учителів, то вони проводять роботу з помилками епізодично і тільки в разі необхідності.

Як основні напрями роботи з математичними помилками учнів учителі називали: 1) аналіз, та виправлення помилок, допущених під час виконання завдань тематичного контролю, самостійних та домашніх робіт; 2) виправлення помилок під час усних відповідей; 2) обговорення допущених помилок. Попередження помилок не увійшло до даного переліку.

Для виправлення допущених математичних помилок більшість вчителів надають перевагу індивідуальним заняттям і заняттям в групах по декілька учнів (32%) та індивідуальним домашнім завданням (41%).

З'ясувалось, що у зв'язку з відсутністю адекватного сучасним вимогам методичного забезпечення роботи з математичними помилками школярів, учителі у своїй діяльності, в основному, керуються власним досвідом та інтуїцією.

За даними анкетування та узагальненням відомостей, одержаних внаслідок бесід з учителями, систему методичної роботи вчителів з математичними помилками учнів можна змодельовати так: виявлення помилок → виправлення помилок → попередження помилок. Ми вважаємо, що головним недоліком такої системи є орієнтування вчителя лише на виявлення помилок, тобто помилок уже допущених учнями.

На наш погляд, основною в організації роботи з помилками учнів є вдало спланована та організована навчальна діяльність учителя та пізнавальна

діяльність учнів з *попередження та недопущення помилок*. Зокрема, система поточного контролю має бути налаштована на усунення локальних прогалин в знаннях учнів. Це дозволить розв'язати два завдання: по-перше, ліквідувати прогалини в знаннях учнів; по-друге, забезпечити якісне засвоєння програмового матеріалу.

Необхідно зауважити, що методичною наукою не розроблено нових методичних рекомендацій на допомогу вчителю математики з питань організації роботи з ліквідації та профілактики прогалин у знаннях учнів в сучасних, змінених умовах розвитку освіти. Останні практичні розробки з даної проблеми та аналіз результатів вступних іспитів були видані ще в XX столітті. Так, наприкінці вісімдесятих – на початку дев'яностих років Міністерством народної освіти України були випущені методичні рекомендації [103, 199, 200] для вчителів шкіл. В них визначені основні типові помилки під час вивчення планіметрії та стереометрії, запропоновані методичні прийоми їх запобігання та усунення. В посібнику [103] проаналізовано деякі учнівські помилки в письмових роботах і усних відповідях під час вивчення алгебри в неповній середній школі, з'ясовано причини їх виникнення та рекомендовано можливі шляхи їх запобігання.

Аналіз помилок, яких припускалися абітурієнти на усних і письмових екзаменах, здійснили П. С. Моденов [169], В. С. Павлович [190], В. О. Тупіков [245]. Автори посібників розглянули приклади найпоширеніших типових помилок, запропонували вправи для самостійної роботи та рекомендації абітурієнтам.

На сучасному етапі розвитку освіти, в умовах зміненого підходу до оцінювання знань помилки учнів майже не досліджуються. Аналізуючи виконання тестових завдань, учителю складно прослідкувати, на якому саме етапі навчання учень не засвоїв програмовий матеріал.

Відомості про характер найпоширеніших помилок учнів, які навчаються за новими програмами та підручниками, можна знайти в офіційних звітах Українського центру оцінювання якості освіти: в аналізах результатів виконання завдань сертифікаційної роботи, матеріалах-оглядах ЗНО, що друкуються в

періодичних фахових виданнях: «Математика в рідній школі», «Математика в школах України», «Математика», в інших комплексних виданнях, автори яких брали участь у перевірці тестів ЗНО. Зокрема, автори комплексного видання [158], здійснюючи аналіз найпоширеніших помилок констатують, що «на зовнішньому незалежному оцінюванні в більшості випадків учні виявляють слабе знання шкільного курсу математики, і саме це є причиною «провалів» [158, с. 163]. Недостатність загальної математичної культури призводить до труднощів у ході перекладання словесної умови завдання на мову математичних формул, рівнянь або нерівностей (наприклад: довести, що функція $f(x)$ невід'ємна записують так: $f(x) > 0$), часто учні плутаються в елементарних поняттях (наприклад, не можуть чітко розмежувати поняття цілого і натурального чисел), при відборі коренів не враховують область допустимих значень змінних для дробово-раціональних, ірраціональних, логарифмічних виразів тощо. Досить часто помилки допускаються в тотожних перетвореннях виразів, розв'язуванні рівнянь, систем рівнянь, нерівностей, у знаходженні області визначення функцій. Завчивши формули, учні не можуть їх використовувати, знаючи формулювання теорем, не можуть пояснити, чому має місце те чи інше твердження, не можуть використати доведену теорему чи твердження до розв'язування задач. Частими є помилки під час розкладання многочленів на множники, зведення алгебраїчних дробів до спільного знаменника. Труднощі викликають завдання на побудову графіків функцій, передбачених програмою. Значна частина учнів не засвоює формули скороченого множення та не володіє раціональними прийомами обчислень. Під час спрощення раціональних виразів учні припускаються суттєвих помилок, зумовлених поганим знанням формул скороченого множення та правил скорочення дробів.

В офіційних звітах останніх років про проведення ЗНО [276], в аналізі результатів виконання завдань відмічається: «оскільки розв'язування чи не всіх завдань з курсу алгебри та геометрії в старших класах базувалося на застосуванні навичок, набутих у 5–9-х класах, то помилки, зроблені тестованими під час обчислень, скорочень або розв'язування найпростіших рівнянь і нерівностей,

призвели до неправильних розв'язань завдань з тем, які вони вивчали в старшій школі».

Аналіз методичної літератури з проблеми дослідження показав, що значна кількість учнів недостатньо орієнтується у всьому вивченому матеріалі, знання мають розрізнений характер, часто мало пов'язаних між собою відомостей з окремих розділів. Школярі не володіють необхідними вміннями розкривати внутрішні зв'язки між поняттями, що вивчаються, встановлювати найпростіші види функціональних залежностей, не вміють робити висновки і узагальнювати накопичені ними математичні факти, не володіють належним рівнем математичної культури.

Спілкуючись з учителями математики, методистами відділів освіти м. Умань, Уманського, Христинівського, Тальнівського районів Черкаської області, Савранського та Іванівського районів Одеської області, м. Благовіщенськ Кіровоградської області з проблеми дослідження, знайомлячись з аналізами контрольних робіт учнів, ми прийшли до висновку, що як і раніше в знаннях учнів шкіл спостерігаються серйозні недоліки, типові помилки повторюються.

Результати участі учнів загальноосвітніх шкіл у міжнародних порівняльних дослідженнях якості шкільної природничо-математичної освіти свідчать про низький рівень спроможності українських школярів використовувати набуті знання та вміння у реальних ситуаціях повсякденного життя. Такі недоліки зберігаються до закінчення школи, про що свідчать результати аналізу виконання випускниками завдань ЗНО з природничо-математичних предметів.

На нашу думку, зменшення кількості годин на вивчення математики, зокрема алгебри в закладах загальної середньої освіти; відсутність ефективної методичної системи роботи над помилками учнів, розробленої для практичного застосування учителями шкіл в сучасних умовах; відсутність спецкурсу з методики навчання математики для студентів педагогічних університетів, розробленого з метою поглиблення знань майбутніх учителів про помилки та організацію навчальної діяльності учнів з їх попередження, є вагомими причинами наявності та «живучості» математичних помилок учнів.

Як показує багаторічний досвід шкільної математичної освіти, під час вивчення нового матеріалу окремі помилки у процесі пізнавальної діяльності учнів – неминучі. Вони можуть бути наслідком неправильного сприйняття учнями пояснення вчителя чи тексту підручника. Саме тому важливо своєчасно і детально виявляти їх виникнення та вдало організовувати роботу з попередження. Цього можна досягти, якщо в класі створюються сприятливі умови, за яких учні ставлять запитання вчителю, висловлюють свої, навіть помилкові думки. Якщо кожен помилку учня виправляти відразу, це сприятиме підвищенню якості навчання. Адже, якщо корекція знань не відбувається чи відбувається частково, помилка вкорінюється. Тоді потрібно «перевчати» школярів, починаючи з початку. Як наслідок, порушується структура навчального процесу, постійно відчувається брак часу, незаповнені прогалини в знаннях переходять від теми до теми із класу в клас, зменшується рівень успішності.

З практичного досвіду роботи в школі, досвіду роботи автора методистом відділу освіти, власних спостережень, можна зробити висновок, що однією з причин появи помилок учнів є те, що вчителі на уроках математики незначну увагу приділяють активізації мисленнєвої діяльності учнів, зокрема, під час вивчення школярами теоретичного матеріалу. Так, наприклад, під час вивчення нових понять традиційним є запитання: що називається...?

На наш погляд, активізує мислення не запитання – «що називається?», а запитання на підведення під поняття, запитання, що спонукають учнів вивести можливі наслідки із належності об'єкта до обсягу поняття; завдання: проілюструвати поняття, навести контрприклад до поняття, розрізнити приклад і контрприклад до поняття.

В ході констатувального експерименту виявилось, що причиною помилок учнів є недостатньо усвідомлений вчителем логічний зв'язок між окремими темами та розділами навчального матеріалу. На уроках не завжди здійснюється цілеспрямована систематична робота вчителя для встановлення зв'язків і відношень між різними елементами знань, порушується принцип систематичності та послідовності.

Аналізуючи відповіді студентів на заняттях з методики навчання математики, елементарної математики, математичного аналізу, ми прийшли до висновку, що однією з причин допущення помилок є недостатній рівень сформованості мислення, зокрема критичного, здатності до рефлексивної діяльності. Вважаємо це наслідком недостатньої уваги до розвитку таких якостей у період навчання в школі. Навчаючи правильного розв'язування завдань, значна частина вчителів математики не акцентує увагу на виробленні вмінь аналізувати, контролювати та здійснювати самоперевірку виконаних завдань. На наш погляд, дуже важливо привчати учнів після закінчення розв'язування задачі повернутися до її умови та осмислити одержаний результат. Якщо учні звикли формально ставитися до одержаних результатів, не привчені зіставляти їх з вихідними даними, то в подальшому в їхніх роботах і з'являються безглузді помилки (наприклад, дробова відповідь під час знаходження кількості людей, від'ємне значення маси тощо).

Причини неуспішності з математики досить часто обумовлені невідповідністю між рівнем розвитку учня та рівнем вимог, які виставляються до нього. Ці вимоги визначаються і змістом навчального матеріалу, і методами навчання. Учителі математики часто недооцінюють роль конкретно-образного мислення школярів, переоцінюють їхню здатність до абстрактного мислення, поспішають з переходом від індуктивного викладу матеріалу до дедуктивного, вимагаючи мислити учня ще не сформованими категоріями.

Практика показує, що однією з причин помилок учнів у знаннях є те, що іноді вчителі в своїй роботі керуються насамперед логікою навчального матеріалу. Іноді логічна бездоганність матеріалу не забезпечує його розуміння учнями, важливо в практиці навчання обов'язково враховувати вікові особливості засвоєння навчального матеріалу, особливості мислення учнів та здійснювати керівництво процесом засвоєння знань, умінь та навичок, як із врахуванням принципу науковості, так і з врахуванням принципу доступності. У ході дослідження нами виявлено, що однією з причин прогалин в знаннях учнів та масовістю помилок, є формалізм у роботі вчителя математики та формалізм у знаннях учнів з математики. Формально засвоєні знання швидко забуваються.

У ході проведення констатувального експерименту, здійснюючи спостереження та проводячи анкетування вчителів, ми прийшли до висновку, що дехто з учителів, хоч і домагається виправлення учнівських алогізмів, все ж, по суті, не проводить систематичної роботи з формування і розвитку логічного мислення. Основні їхні недоліки полягають в тому, що, по-перше, помилки виправляються без чіткої системи запитань, які б змушували учнів працювати в потрібному напрямі. По-друге, вчителі не акцентують уваги на тих логічних прогалинах, які є об'єктом їх розгляду, не пояснюють їх змісту і неприпустимості. Тим самим не розкривають можливості логічного мислення. По-третє, учні не навчаються цілеспрямовано (з установкою на усвідомлену логічність мислення) повторювати правильний хід міркувань.

Однією із причин появи помилок в знаннях учнів з алгебри вважаємо використання таких методів навчання, які не привчають учнів ставитися критично як до питань і задач, що розглядаються на уроці, так і до вибору необхідних методів для одержання відповіді на поставлені запитання.

Отже, якщо говорити про спеціально організовану роботу з помилками учнів під час вивчення алгебри, то необхідно зазначити, що на практиці ця проблема розв'язується неефективно. Основною причиною такого стану, на наш погляд, є те, що значна частина вчителів математики або не володіє ефективною науково обґрунтованою методикою організації та проведення роботи по запобіганню, попередженню та виправленню помилок учнів, або в їхньому арсеналі така методика відсутня взагалі.

1.2. Превентивна діяльність у навчанні математики

Учіння є відображувально-перетворювальною діяльністю, оскільки спрямоване на перетворення власного досвіду учня засобами пізнання та самопізнання. Головна теза діяльнісного підходу в розвитку особистості полягає в тому, що людина виявляє властивості та зв'язки елементів реального світу лише у процесі й на основі різних видів діяльності (предметної, розумової, індивідуальної, колективної тощо).

Учень добре усвідомлює лише те, що виступає як прямий предмет і як мета його діяльності. Тому учіння передбачає, з одного боку, виконання школярами відповідних дій з навчальним матеріалом (а не просто його спостереження і прослуховування), а з іншого – перетворення матеріалу, що засвоюється, на пряму мету цих дій, тобто на розв'язування навчальних задач. Активне формування навчальної діяльності призводить до істотних змін в особистості учня, в його свідомості, інтелектуальному й моральному розвитку, тобто сприяє становленню учня як суб'єкта діяльності, як індивідуальності. Знання й уміння з математики свідомо засвоюються лише тоді, коли учень з виконаної діяльності та її результатів здобуває інформацію про істотні властивості реального світу.

У навчальній діяльності, як і в будь-якій іншій, науковці розрізняють три компоненти: 1) мотиви і навчальні задачі; 2) навчальні дії; 3) дії контролю навчальних досягнень школярів.

Навчальну діяльність не можна звести до жодного з цих компонентів. Повноцінна навчальна діяльність завжди є єдністю і взаємопроникненням всіх трьох компонентів. Протягом всього навчання в учнів виховується певне ставлення до знань, навчальні мотиви. Завдяки цьому знання й уміння набувають для них особистісного смислу, стають їхнім внутрішнім надбанням [231].

Відповідно до діяльнісного підходу етапи засвоєння знань розглядаються водночас з етапами засвоєння діяльності. Знання із самого початку включаються в структуру дій. Якість знань у цьому разі визначається їхньою адекватністю діяльності, що використовується для їх засвоєння. На думку Н. Ф. Талізінної, знання ніколи не можна дати в готовому вигляді, вони завжди засвоюються через ту чи іншу діяльність [238].

Діяльнісний підхід до організації навчання математики потребує, щоб учень, під час опрацювання навчального матеріалу здійснив повний цикл пізнавальних дій: сприйняв навчальний матеріал, усвідомив його, запам'ятав, потренувався в застосуванні знань на практиці, тобто, здійснив такі навчальні дії - повторив раніше вивчене і на його основі вивчив новий матеріал, поглибив і узагальнив вивчене, навчився застосовувати набуті знання на практиці.

На нашу думку, необхідно організовувати у навчанні математики важливий вид навчальної діяльності – ***діяльність, яка включає попередження, виявлення та усунення прогалин в знаннях***. Таку діяльність називаємо ***превентивною***.

Превентивна діяльність з попередження можливих помилок учнів, аналізу і виправлення допущених помилок повинна розглядатися як невіддільна складова навчально-пізнавальної діяльності учнів. Вона має бути спрямована на формування міцних і глибоких знань з математики. Необхідні знання з математики, вміння і навички, учні набувають тільки через самостійні інтелектуальні зусилля, а вчитель, спираючись на різні методи і засоби, спрямовує учнів, організовує навчальний процес. Якщо навчальна діяльність виконується через активні мисленнєві зусилля і при цьому досягається чітке розуміння матеріалу, що вивчається, чи задачі, що розв'язується, то така діяльність стає для учнів цікавішою та привабливішою [72].

Розглянемо визначені нами структурні компоненти превентивної діяльності, функції та принципи організації такої діяльності.

1.2.1. Зміст та структура превентивної діяльності вчителя математики

Термін «превентивний» (лат. *preventio* - попереджувальний, запобіжний, захисний) з'явився в освітньому просторі України у 1994 році внаслідок започаткованої творчої співпраці з департаментом превентивної освіти ЮНЕСКО. Відтоді в Україні превентивне виховання та проблеми виховання досліджуються інтенсивніше згідно з Концепцією превентивного виховання дітей і молоді, затвердженою Президією НАПН України у лютому 1998 року [90]. Нині ефективно розвиваються такі напрями досліджень в галузі педагогіки і психології, як превентивна педагогіка (Л. В. Кондрашова, В. М. Оржеховська, О. І. Пилипенко, А. П. Сманцер) та превентивна психологія (С. О. Беличева).

В. М. Оржеховська *превентивною педагогікою* називає педагогіку, яка вивчає причини (курсив наш) формування і розвитку відхилень у поведінці людини і методи їх попередження, подолання, виправлення [186]. Л. В. Кондрашова під *превентивною педагогікою* розуміє область педагогічного знання, яка орієнтована

на розв'язання проблем формування особистості засобом особистісно орієнтованого педагогічного впливу, взаємодії, співробітництва і співтворчості між учителем і учнем на основі індивідуальних та вікових особливостей [125].

У педагогічному аспекті А. П. Сманцер трактує *превенцію* як запобігання, оберігання, попередження, пом'якшення негативних дій і поведінки у дітей, а також педагогічну допомогу і підтримку в складних ситуаціях.

Превенція передбачає випереджаючі дії педагогів, вихователів, тобто випередження негативних дій і вчинків дітей. Вони не дають можливості проявитися в ускладненнях у навчанні, поведінці та, загалом у життєдіяльності дітей.

Під *превентивною діяльністю* автор розуміє активність вихователя, вчителя у взаємодії з учнями, яка спрямована на виховання творчої особистості, здатної до активних дій із запобігання відхиленням від прийнятих норм і правил поведінки [232].

У сучасній педагогічній науці сферу використання *превентивної педагогіки* частіше всього відносять до профілактичної діяльності, яка на ранній стадії може запобігати відхиленням у поведінці дітей.

С. О. Беличева відзначає, що сферою використання *превентивної психології* є виховно-профілактична робота з неповнолітніми, відхилення в поведінці яких має свою специфічну природу, а завдання *превентивної психології* вбачає в озброєнні педагогічних працівників психологічним багажем знань, необхідним для попередження, діагностики і корекції відхилень у поведінці учнів [16].

У наведених оглядах ми прослідковуємо діяльнісний підхід впливу на особистість з метою виявлення причин відхилень у поведінці, здійснення профілактичної та діагностичної роботи для запобігання відхиленням, організацію взаємодії вчителя і учнів, спрямовану на протидію негативним відхиленням і виховання творчої особистості, здатної до запобігання цим відхиленням.

Дослідження превентивної діяльності в галузі педагогіки і психології переконують, що даний напрям, в силу його актуальності й перспективності,

доцільно використовувати і під час вивчення шкільних навчальних дисциплін, зокрема алгебри в основній школі.

Проведений нами аналіз досліджень з методики навчання математики показав, що в Україні питаннями організації превентивної діяльності на уроках математики дослідники не займалися. Деякі аспекти превентивної діяльності учителя на уроках математики в 5-7 класах шкіл Білорусі розглянув у своєму дисертаційному дослідженні С. І. Зенько [105].

У нашому дослідженні будемо розглядати *превенцію* як виховання в учнів основної школи «стійкості» до появи алгебраїчних помилок, своєчасне виявлення та попередження прогалин у знаннях, а також надання педагогічної допомоги та підтримки у роботі над помилками.

Під превентивною діяльністю вчителя математики будемо розуміти навчальну діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та обрати необхідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

Превентивна діяльність має організовуватися як процес взаємодії вчителя й учнів, в ході якого через спеціально дібрані методи, по-перше, виявляється поява та походження помилок, а по-друге, організовується робота з попередження та ліквідації цих помилок. Головним завданням формування превентивної навчальної діяльності школярів є розвиток у них уміння самостійно дотримуватися всіх її структурних компонентів і переходити від одного компонента до іншого (від прийняття рішення здійснювати певну діяльність до її планування, від дій і операцій до самоконтролю і самооцінки). Спочатку учні відпрацьовують усі дії разом з учителем. У результаті такої співпраці учень навчається ставити перед собою навчальну мету, планувати свою діяльність, виконувати дії й операції, контролювати хід виконання, оцінювати результат, робити висновки, коректувати на перспективу свої дії.

Хоча формування того чи іншого компонента діяльності учня, в силу індивідуальних особливостей, проходить по-різному, завдання учителя математики – підтримати будь-яку ініціативу учня в самоорганізації. *Дидактично*

виважена превентивна діяльність вчителя сприяє ефективній організації превентивної діяльності учнів.

Діяльнісний підхід у розробці питань реалізації функцій тематичного контролю результатів навчання математики учнів старшої школи в умовах традиційного освітнього процесу був проаналізований в дослідженні В. О. Швеця [260]. Відповідно до структури діяльності, автор виділяє у тематичному контролі такі компоненти, як *потреби, мотиви, мету, умови досягнення мети /задача/, планування діяльності, дії*, і розкриває їх зміст. Ми дотримуємося такого підходу і розглянемо зміст вище згаданих компонентів в умовах організації превентивної діяльності вчителя та навчальної діяльності учнів, яка згодом стає їхньою сумісною діяльністю.

Відомо, що формування будь-яких потреб, зокрема потреби в навчальній діяльності, пізнавальних інтересів, можливе тільки в процесі самої діяльності. Скільки б учень не чув про необхідність навчальної діяльності, про його обов'язки, про важливість для нього самого цієї діяльності в майбутньому, і як би добре не осмислював справедливість цих слів, але якщо він не включився в цю діяльність, то ніяких мотивів до навчальної діяльності у нього, як правило, не виникає, тим більше не формується стійкий пізнавальний інтерес до цієї діяльності. Щоб мотиви виникли і закріпились, учень повинен починати діяти, і тоді, якщо сама ця діяльність викличе у нього інтерес, якщо в її процесі він буде відчувати яскраві позитивні емоції задоволення, радості, захоплення, то можна чекати, що у нього поступово виникнуть потреби в такій діяльності, а значить, сформується стійкий пізнавальний інтерес до неї.

Потреба у формуванні предметної математичної компетентності учня передбачає реалізацію потреби у попередженні та ліквідації прогалин у його знаннях.

Якщо для вчителя ця потреба вже визначена та чітко мотивована, то для учня потреба у вмінні вчасно виявляти та виправляти допущені помилки має бути сформована учителем і стати його індивідуальною потребою. Превентивна діяльність, організована вчителем, стає навчальною діяльністю, що розвиває

особистість учня лише в тому випадку, якщо для її виконання у школяра є внутрішня спонука, викликана його особистою потребою. Необхідно сприяти розумінню учнем важливості такої діяльності. Як відомо, думати учень починає тоді, коли потрібно щось зрозуміти, зробити висновок.

Оскільки робота над помилками є складовою частиною навчальної діяльності, то можна вважати, що потреби і мотиви такої роботи визначаються потребами і мотивами, які спонукають учнів до самої діяльності. *Тому мотиви навчання, спрямовані на процес пізнання, на підвищення ефективності його результатів, стають мотивами здійснення заходів по ліквідації прогалин в знаннях.*

Мотивація діяльності учнів значно впливає на засвоєння матеріалу, розвиток інтересу до теми, що вивчається, осмислення значущості, важливості даного матеріалу, стійкі інтереси і потреби, позитивні емоції, що виникають під час успішного засвоєння навчального матеріалу, негативні емоції, викликані хвилюванням, почуттям сорому та незадоволенням собою через неуважність, тимчасовими невдачами під час виконання посильних завдань.

Як відомо, ефективність будь-якої методичної системи навчання залежить, зокрема від того, наскільки добре її використання забезпечує формування та стійкості в учнів позитивних мотивів до опанування знаннями та вміннями. Вчитель повинен навчитися керувати діяльністю учнів під час навчання, а для цього він повинен вміти формувати у них необхідну мотивацію. Адже в протилежному випадку, якщо цього не робити, стає дійсністю небезпека, про яку говорив В. О. Сухомлинський: «Всі наші задуми, всі пошуки і побудови перетворюються в прах, якщо в учня немає бажання вчитися» [236, с.7].

Питання мотивації навчальної діяльності школярів досліджували М. І. Алексєєва [1], Л. І. Божович [37], М. В. Матюхіна [159], А. К. Маркова [156] та інші.

Мотиви, які формуються у процесі навчання, спричиняються певними потребами. Формування мотиву починається під впливом внутрішнього стимулу (органічної потреби) або зовнішнього стимулу з невизначеною вимогою,

проханням, наказом. Більшість мотивів, які формуються у процесі навчання математики, спричиняються дією саме зовнішніх стимулів, але ці стимули повинні знайти відображення у певних потребах учнів. Наприклад, один зовнішній стимул (пропозиція розв'язати задачу) зумовлює різні потреби (емоційне задоволення від безпомилкового розв'язання, пізнавальний інтерес, потребу у схваленні, можливість знайти в роботі над задачею нові факти, що розширяють математичний кругозір) або може і не зумовлювати ніяких потреб у деяких учнів і не викликати дій щодо розв'язування задач. Отже, одна з основних проблем навчання полягає у тому, щоб для кожної передбаченої для формування дії виділити відповідні мотиви та знайти такі зовнішні стимули, які б сприяли виникненню цих мотивів у більшості учнів.

Так, якщо актуалізувати мотиви попередніх досягнень перед введенням нового матеріалу, викликати незадоволення наявним рівнем та прогалинами в знаннях на етапі закріплення нового матеріалу, підсилити мотиви, орієнтуючись на взаємозв'язки з потребами практики, то це сприятиме кращому засвоєнню навчального матеріалу з мінімальною кількістю помилок.

На наш погляд, на будь-якому етапі навчання корисно використовувати здивування, що ефективно впливатиме як на сильних учнів, так і на школярів з низьким рівнем знань. Оскільки допущені помилки є результатом не стільки низького рівня знань учнів, скільки недостатніми зусиллями як учнів, так і вчителів з їх попередження та виправлення, то формування мотивації до вивчення матеріалу повинно здійснюватись як на етапі виправлення помилок, так і на етапі їх попередження, що сприятиме більш осмисленому сприйняттю нових математичних знань. Такими мотивами можуть бути:

- *задоволення від досягнення успіху;*
- *очікування позитивних емоцій, вражень від певних подій;*
- *заохочення;*
- *безпосередня зацікавленість;*
- *можливість висловити свою думку;*
- *самовираження і самовдосконалення;*

– незадоволення наявним рівнем знань.

Розбір помилок корисний ще і тому, що, ознайомившись з якою-небудь помилкою і ретельно проаналізувавши її, учень так чи інакше застраховує себе від повторення подібних помилок у майбутньому. Окрім того, робота над помилками може слугувати дієвим засобом для досягнення точності означень, точності формулювань теорем, тверджень. Аналізуючи помилки, що з'являються в процесі навчання, учні вчаться шліфувати кожне слово у своїй відповіді, думати над кожним реченням, осмислювати причини появи помилок. На нашу думку, **основним мотивом превентивної діяльності як для учня так і для вчителя є високий рівень засвоєння учнями навчального матеріалу з найменшою кількістю помилок**, що сприятиме успішному навчанню в подальшому.

Для сучасних умов шкільного навчання характерніші нетипові, у порівнянні з 90-ми роками, мотиви навчання. Якщо підліток 80-х і 90-х років розглядав себе як частину суспільства, ставлячи інтереси останнього вище власних, то для сучасного підлітка головною цінністю є він сам, і тому навіть в мотивації навчання на першому місці опиняються прагнення до саморозвитку й самореалізації.

Значною рушійною силою попередження і усунення помилок учнів у вивченні математики є інтерес. Саме завдяки інтересу, процес надбання знань може стати рушійною силою розвитку інтелекту, оскільки він позитивно впливає на всі психічні процеси і функції: увагу, пам'ять, працездатність.

Наявність позитивного мотиву є гарантією швидкого та якісного формування діяльності, і навпаки, успішне опанування діями та операціями діяльності призводить до утворення або ж закріплення стійкого позитивного мотиву її реалізації. Так, наприклад, сформованість позитивно вмотивованої діяльності учня на опанування вміннями і навичками розв'язувати задачі з математики сприяє утворенню стійкої мотиваційної спрямованості на безпомилкове розв'язання таких задач.

Отже, говорити про превентивність як про діяльність можна в тому випадку, якщо в учня створена відповідна система мотивів. Пізнавальні мотиви навчання,

спрямовані на процес пізнання, підвищення ефективності його результатів – знань, умінь і навичок, а також на способи пізнання та набуття знань, прийоми і методи навчальної праці стають і мотивами превентивної діяльності.

Як зазначалось вище, головна мета навчання у школі полягає в максимальному розвитку особистості учня відповідно до його здібностей, можливостей, нахилів. Безумовно, ефективно організоване виправлення помилок та здійснення профілактичних заходів щодо їх попередження сприяє підвищенню якості знань учнів, активізує їхнє мислення та служить меті розвивального навчання. Тому відповідно до цього, робота над математичними помилками учнів має за мету: спрямовувати роботу над помилками на результати навчання, на хід і темп просування кожного учня в опануванні змістом освіти, на розкриття і рівень розвитку його потенційних можливостей, задоволення його потреб, взагалі, на якість і ефективність процесу навчання.

Основною метою превентивної діяльності у процесі навчання математики є організація найсприятливіших умов для вивчення програмового матеріалу, переходу школярів від розуміння матеріалу до міцного його засвоєння, осмислення та закріплення, що сприятиме зменшенню неуспішності учнів.

Досягнення мети, як відомо, здійснюється через виконання певних дій. Ці дії реалізують окремі проміжні цілі, які виділяються із загальної мети. До таких дій превентивної діяльності ми відносимо: *аналіз, попередження, виправлення математичних помилок*. Розглянемо кожен з них детальніше.

Аналіз математичних помилок. Метою такої дії в умовах особистісної спрямованості освітнього процесу є відстеження математичних помилок кожного учня, розкриття їх природи, пояснення причин появи. На нашу думку, аналіз математичних помилок учнів повинен охоплювати такі основні етапи:

- виявлення змісту помилок;
- облік помилок;
- дослідження причин появи помилок;
- попереднє прогнозування можливостей попередження помилок.

Щоб визначити сутність алгебраїчних помилок, які допускаються учнями під час розв'язування задач, необхідно простежити хід міркувань, що приводить до помилкового розв'язування, встановити етапи, на яких зароджуються помилки, тому що в більшості випадків кожне хибне судження – це результат якогось ходу учнівської думки, якоїсь «своєї» логіки міркування. Іноді при розв'язуванні навіть однієї задачі учень може помилитися декілька разів, про що важко здогадатися, дивлячись на запис остаточного результату. Як показує досвід, часто учневі незрозумілий не весь матеріал, а лише якась його частина. Виявивши, що саме незрозуміле учневі (а у встановленні цього вчителю допоможе аналіз помилок, що допускаються учнем), учитель може зосередити на цьому матеріалі увагу, не відволікаючись на ті моменти, які вже засвоєні.

Встановлення змісту помилок здійснюється перевіркою (попередньою, поточною, тематичною або усною, письмовою чи за допомогою комп'ютерних технологій), спрямованою на виявлення результатів навчальної діяльності учнів, вивчення процесу досягнення цих результатів, темпу просування кожного учня в опануванні змістом матеріалу, розвитку і реалізації його можливостей, нахилів та інтересів. Ми поділяємо думку В. О Швеця, що саме поточною перевіркою є змога своєчасно виявити можливі помилки та недоліки учнів під час вивчення відповідної теми [259]. Результати такої перевірки дають змогу прослідкувати розвиток навченості кожного учня, простежити рівень опанування навчальним матеріалом, здатність до безпомилкового розв'язування завдань, знайти шляхи удосконалення навчального процесу, своєчасно вносити певні корективи в навчальну діяльність відповідно до індивідуальних особливостей учнів. Зокрема, уточнити зміст помилки можна, запропонувавши школярам для розв'язування спеціально дібрані (з можливою появою помилок) вправи. Інтерес у цьому розумінні представляють ті задачі, в яких є помилки, що допускалися самими учнями в контрольних роботах і під час усних відповідей. Вчитель не повинен поспішати з виправленням кожного помилкового твердження учнів. Бажано обговорити це твердження всім класом, якщо недоліки і помилки типові, або з

окремими учнями, якщо вони мали індивідуальний характер, та досягти усвідомленого виправлення допущених помилок.

У шкільній практиці майже завжди пропонують учням завдання, у яких в умові відсутні помилки. Це виробляє в школярів надмірну довіру до всіх повідомлень, вказівок, завдань, навіть до всіх відповідей, прикладів і задач, наведених у задачниках і підручниках. У життєвій практиці, наприклад, у кресленнях, схемах, розрахунках, з якими учні в майбутньому зустрінуться, можуть бути і помилки. Якщо не навчити учнів критично ставитися до умов завдань та знайдених результатів, то можуть бути серйозні наслідки в роботі. Щоб цього уникнути, необхідно формувати в учнів уміння аналізувати дані, здатність виявляти помилки, що зустрічаються, і обґрунтовувати помилковість тверджень. Звичка критично ставитися до будь-якого судження має велике життєве значення, оскільки учні поступово звикають давати оцінку як особистим думкам, так і висловлюванням інших. Якщо ж школярі не допускають помилок, то все одно необхідно виявити, настільки вони «стійкі» до типових помилок, запропонувавши задачі, складені вчителем з урахуванням найпоширеніших, типових помилок.

В роботі з попередження та недопущення помилок учнів значне місце займає **облік помилок**. Аналіз різного рівня перевірних робіт дозволяє вчителю всебічно вести облік учнівських помилок і заносити їх в спеціальні таблиці реєстрації помилок. Окрім того, бажано також вести облік помилок, які допускають окремі учні. Його можна вести в індивідуальних картках реєстрації прогалин в знаннях школярів. При цьому бажано фіксувати не тільки ті помилки, які свідчать про явні прогалини в знаннях, а також виправлення, які свідчать про недостатньо міцне засвоєння відповідного матеріалу. Необхідно відзначати й ті завдання, з якими учні не впоралися взагалі.

Процес знаходження та виправлення помилок самими учнями під керівництвом учителя важливо зробити повчальним для учнів, внаслідок чого вивчення та аналіз помилок стає ефективним засобом в розвитку пізнавального інтересу взагалі та інтересу до вивчення математики зокрема.

Враховуючи, що наше дослідження спрямоване на вивчення причин та розробку методів попередження типових помилок учнів, *облік та виявлення їх змісту* були необхідні, головним чином, для перевірки типовості тієї чи іншої помилки, тобто віднесення певної помилки до випадкових чи систематичних.

Ми стверджуємо, що вивчення помилок учнів не повинно закінчуватись встановленням того, що неправильно виконав учень, а **повинно бути продовжено і спрямовано на знаходження відповіді на питання: чому він це зробив? Які обставини спонукали появу відповідної помилкової дії? Як попередити появу помилок?** Тобто вчитель повинен насамперед розуміти причини виникнення помилок та умови, необхідні для правильного виконання конкретного завдання.

Систематичний *облік* помилок, виявлення їх змісту має допомогти вчителю:

- *одержати достатньо повне уявлення про помилки та недоліки в знаннях кожного учня та здійснювати заходи з їх ліквідації;*
- *уникнути випадків виставлення високої підсумкової оцінки за тему, якщо з неї у школяра є суттєві прогалини;*
- *виявити помилки, характерні для вивчення певної теми, і відповідно добирати зміст, форми, засоби, методи подальшого навчання. Іноді має сенс затрата часу на додаткове вивчення складного для учнів матеріалу, щоб досягти його засвоєння;*
- *під час навчання математики у подальшому в тих же класах внести необхідні корективи в методи і прийоми навчання з урахуванням допущених учнями помилок, а також труднощів, з якими вони зустрічаються.*

Тільки завдяки постійній і систематичній роботі з виявлення й систематизації допущених учнями помилок, ретельним їх вивченням, можна розкривати причини їх появи та накреслювати найефективніші заходи з попередження та виправлення, а отже, сприяти успішному вирішенню завдання підвищення рівня математичної підготовки учнів.

Попередженням появи помилок будемо називати дію в організації навчальної діяльності учнів, спрямовану на міцне засвоєння знань з мінімальною кількістю допущених помилок.

Важливу роль у попередженні помилок відіграє зміст та продумана організація вивчення нового матеріалу. Для учня, який починає вивчення нової теми, важливо знати, що з раніше засвоєного матеріалу йому знадобиться в цей момент, виявити прогалини у знаннях і своєчасно їх усунути. Інакше він не зможе успішно сприймати новий матеріал, що призведе до слабких знань і, врешті, їх втрати, а отже, до негативного результату навчання. У зв'язку з цим, учителю необхідно скласти систему завдань, яка б давала можливість визначити, наскільки міцними є знання учнів базового матеріалу, необхідного для свідомого засвоєння *нового*. Вивчення нового матеріалу потрібно будувати так, щоб учень був активним учасником цього процесу. Не треба боятися, якщо при першому сприйнятті матеріалу учнем будуть допускатися помилки, висловлюватися необґрунтовані висновки. Важливо, щоб ті чи інші помилки в розумінні матеріалу виправлялися відразу, щоб учні сприймали навчальний матеріал усвідомлено.

Такому підходу до вивчення нового матеріалу сприяє створення проблемних ситуацій і розв'язання їх учнями самостійно, чи під керівництвом учителя. На уроках математики учні проходять через такі стадії як: пошук нового (поставлена проблема, що має бути вирішена учнем!), можлива поява помилок у процесі пошуку нового, ґрунтовний аналіз і виправлення помилок, знову пошуки, у результаті яких приходять до правильного висновку, нарешті, доведення, добутого в пошуках твердження. Корисно перед учнями ставити питання, які допоможуть виявляти розуміння суті матеріалу, що вивчається, зокрема теорем, нових тверджень та фактів, встановлювати рівень їхніх міркувань, а також уміння відтворювати сприйняті знання в змінених умовах.

Важливу роль в умовах організації превентивної діяльності відіграє особистість вчителя, його досвід та майстерність, володіння даними про можливість появи типових помилок під час вивчення тієї чи іншої теми. Вчитель повинен володіти ситуацією, вчасно запропонувати завдання, поставити питання, навести контрприклад, чи влаштувати провокацію ще до того, коли учень може допустити помилку.

Важливою є організація та проведення повторення основних теоретичних відомостей з такою частотою, що забезпечить їх міцне запам'ятовування.

Під час здійснення превентивної діяльності вчителю необхідно постійно контролювати рівень складності викладу начального матеріалу та потенційні можливості школярів. Відомо, що якщо матеріал незрозумілий, то **він засвоюється формально, запам'ятовується неточно, відхилення не помічаються і виникає ілюзія запам'ятовування та засвоєння**. Необхідною умовою запам'ятовування матеріалу є його розуміння.

Своєчасний контроль, який є невіддільною складовою всього навчального процесу, здійснює значний вплив не тільки на результат, але й на хід навчання, оскільки забезпечує одержання даних про рівень ефективності функціонування будь-якої системи навчання [260]. Правильно організований контроль допомагає школярам критично оцінити свої успіхи та недоліки у засвоєнні того чи іншого матеріалу, а потім правильно і раціонально під керівництвом вчителя організувати свою подальшу роботу, сформувати навички самоконтролю, виховати низку якостей особистості, наприклад, таких, як відповідальність за роботу, що виконується, наполегливість, охайність тощо.

Не менш важливим напрямом для ефективного здійснення превентивної діяльності вчителя математики є правильна організація навчальної діяльності учнів як на уроках математики, так і під час виконання домашніх завдань. Домашні завдання продовжують ту роботу, яка була проведена на уроці, і її успішне виконання залежить від того, наскільки учні на уроці підготовлені до виконання цього завдання. Аналіз причин відставання учнів у навчанні математики дозволяє зробити висновок, що проблема підвищення ефективності навчання та інтенсифікації навчальної роботи школярів може бути успішно розв'язаною за умови, якщо висока якість шкільних занять буде підсилюватися добре організованою домашньою роботою.

Отже, попередження помилок доцільно здійснювати на етапах:

– вивчення теоретичного матеріалу в умовах організації засвоєння теоретичного змісту підручника математики;

- *самостійної навчальної діяльності учнів;*
- *засвоєння нового матеріалу;*
- *повторення та узагальнення вивченого матеріалу;*
- *виконання домашнього завдання;*
- *контролю рівня навчальних досягнень учнів.*

Досвід роботи вчителів математики, який ми вивчали, показує, що перевірка правильності розв'язання задач учнями найчастіше здійснюється через порівняння з відповіддю, яка є в підручнику, або яку повідомить учитель. На практиці доводиться мати справу із задачами, відповіді до яких не подаються. Тому учні повинні вміти перевіряти правильність розв'язаних ними задач самостійно, щоб бути впевненим в отриманому результаті. З метою попередження помилок необхідно сформулювати в школярів **навички самоконтролю**. Ці навички складаються з двох частин: а) *уміти знайти помилку*; б) *уміти її виправити*.

Важливо навчити учнів здійснювати: *перевірку обчислення і тотожного перетворення через виконання оберненої дії чи підставлянням допустимих числових значень у початковий і кінцевий вирази; перевірку правильності розв'язання задач через складання і розв'язування задач, обернених до даних; оцінювання розв'язку задачі з погляду здорового глузду; перевірку того, чи задовольняє розв'язок умову задачі; перевірку аналітичного розв'язання графічним способом; поопераційну перевірку; перевірку правильності міркувань за допомогою «кругів» Ейлера*. Іноді дієвим способом перевірки є інший спосіб розв'язування задачі. Відповідальним моментом у навчанні учнів самоконтролю є знайомство зі зразками, за якими будуть порівнюватись використані способи виконання завдань та одержані результати.

Виробленню навичок самоконтролю допомагає і прийом наближеної оцінки очікуваного результату. Встановлення можливих меж очікуваної відповіді попереджає недоліки типу описок, пропуску цифр тощо. Ефективними є провокаційні завдання, умови яких містять вказівки чи інші спонуки, які провокують учнів до помилкових розв'язань. Допускаючи помилки, усвідомлюючи провокаційні наміри вчителя і характер навчальної ситуації, учень

емоційно сприймає, надовго запам'ятовує помилкову дію і в подальшому на підсвідомому рівні остерігається її. Захопливим матеріалом для такого типу діяльності є софізми та парадокси. Такі завдання створюють пошукову ситуацію, тобто ситуацію, коли учням потрібно розшукати помилку і виправити її, критично осмислюючи кожен етап міркувань. Зокрема, міцність засвоєння математичних фактів значно покращується емоційним сприйняттям абсурдного твердження софізму. Важливо навчити учнів виявляти і пояснювати помилки, розгорнуто і послідовно будувати спростування.

Самостійна робота учнів над помилками через формування навичок самоконтролю забезпечує більш осмислений їх аналіз та аналіз особистих дій з розв'язування конкретних задач. Це впливає на якість одержаних знань та стимулює розвиток логічного мислення, його характерних показників: критичність, доказовість, активність, глибину та гнучкість.

З метою попередження помилок у процесі навчання алгебри доцільно пропонувати учням такі завдання:

- *знайти помилку у формулюванні правила чи теореми;*
- *знайти суперечність у наведеному математичному тексті;*
- *знайти невідповідність змісту завдання з раніше вивченим матеріалом, із практикою, суміжними навчальними предметами, із здоровим глуздом;*
- *знайти зайві дані в умові задачі;*
- *виявити неповноту умови задачі;*
- *завершити неповне розв'язання задачі;*
- *знайти принципові прогалини в розв'язуванні задачі.*

Детальніше зупинимось на цих питаннях у розділі 2 нашої роботи.

Виправлення помилок – дія, спрямована на усунення недоліків і прогалин у знаннях, уміннях та навичках учнів, ліквідацію виявлених розбіжностей між досягнутими і запланованими результатами.

Нерідко доводиться спостерігати, як учитель, пояснюючи незрозумілий учню матеріал, не дає учневі можливості розв'язувати завдання по-своєму, а відразу показує зразок правильного розв'язання. У цьому випадку учень не може

зрозуміти, чому він неправильно розв'язує, в чому полягає його помилка, і тим самим ігнорується найважливіший прийом – навчання на помилках. За іншого підходу вчитель не ігнорує неправильне розв'язання, а прослідковуючи хід міркувань учня, вибирає в ньому найуразливіші місця, абсурдність отриманого результату, і співставляє вихідні й отримані дані. Так вчитель спонукає учня відмовитися від свого розв'язання. Шлях переконання учня в неправильності його розв'язання досить тривалий, тому що відбувається перебудова в знаннях, а не просте нашарування одних на інші, як це буває при готовому розв'язанні. Але цей шлях сприяє глибшому усвідомленню суттєвості помилки. Передбачаючи, коли учні можуть припуститися помилок, досвідчений вчитель спеціальними вправами створює проблемні ситуації, а це дає змогу не просто уникнути помилки, а й акцентувати увагу учнів на можливості її появи. **Пояснення допущених учнями помилок є обов'язковим, адже тільки так можна перевірити, наскільки учень їх усвідомив.**

Острах припуститися помилки часто сковує ініціативу учня. Боячись помилитися, він не буде сам вирішувати поставлену проблему, а стане чекати допомоги від учителя. Але без самостійного розв'язування задач з послідовно зростаючою складністю не може відбуватися інтелектуальний розвиток. У багатьох випадках з цієї причини учні виявляють систематичну боязкість і інтелектуальну пасивність, які, вкорінюючись, надалі призводять до неуспішності.

Цілеспрямована робота над помилками вимагає систематизації помилок, що з'являються у процесі вивчення алгебри. При цьому вирішальну роль повинні відігравати не окремі приклади помилок, а групи помилок, об'єднаних спільністю причин їх появи, спільністю методики роботи над ними. Така систематизація помилок дозволяє накреслити головні шляхи їх ліквідації і, що найголовніше – попередження помилок у подальшому. Знання вчителем типових учнівських помилок, причин виникнення і форм вияву дає можливість передбачати і попереджати їх появу. Це досягається через добір таких вправ, які перешкоджають утворенню однобічних уявлень і неправильних узагальнень. Корисно виправляти

помилки і неточності у формулюванні означень, теорем, висловлень за допомогою наведення контрприкладів.

Особливого ставлення з боку вчителя вимагають помилки випадкового характеру (помилки через нестійкість самоконтролю). Для правильного вибору методики роботи над такими помилками необхідно насамперед з'ясувати, чи є вона випадковою, чи вона – результат нерозуміння навчального матеріалу. Якщо вчитель встановить, що помилка допущена через нерозуміння матеріалу, то в цьому випадку треба порекомендувати учню провести таку роботу над помилками: встановити помилковість своїх висновків, прочитати відповідний матеріал тексту підручника, проаналізувати доведення теореми чи виведення формули, розв'язати систему вправ ще раз.

Отже, в даному пункті, враховуючи напрями розвитку превентивної педагогіки та превентивної психології, ми визначили змістовий аспект поняття «превентивна діяльність учителя математики» та виокремили її основні структурні компоненти. Розгляду функцій і принципів превентивної діяльності вчителя математики буде присвячено наступний пункт нашого дослідження.

1.2.2. Превентивна діяльність у навчанні математики: функції і принципи

Проведений аналіз науково-методичної, дидактичної літератури і власні дослідження дають змогу стверджувати, що під час здійснення превентивної діяльності вчителя математики можуть успішно реалізуватися такі функції: *діагностична, прогностична, попереджувальна, стимулююча, навчальна, коригувальна, розвивальна, виховна, методична, емоційно-збережувальна та психологічна*. Розглянемо зміст кожної з них детальніше.

Діагностична функція передбачає здійснення регулярного встановлення рівня засвоєння алгебраїчного матеріалу.

Прогностична функція полягає у систематичному вивченні допущених помилок та вмінні передбачати появу аналогічних помилок у майбутньому.

Попереджувальна функція спрямована на актуалізацію знань, необхідних для застереження учнів від можливих алгебраїчних помилок.

Стимулююча функція визначає забезпечення позитивних мотивів, впевненість у власних силах у досягненні поставлених вимог та створення сприятливих умов для здійснення пізнавальної активності.

Освітня функція полягає в оволодінні учнями математичними знаннями, вміннями і навичками під час вивчення алгебри в основній школі.

Коригувальна функція визначає процес, спрямований на попередження і своєчасне виправлення алгебраїчних помилок, а також ліквідацію прогалин у знаннях та вміннях окремих учнів.

Розвивальна функція спрямована на інтелектуальне зростання учнів, розвиток уваги, пам'яті, мислення, мовлення, оволодіння раціональними способами навчально-пізнавальної діяльності.

Виховна функція полягає у вихованні в учнів здатності до саморегулювання, формування відповідальності за результати власної навчальної діяльності.

Методична функція пов'язана зі здійсненням учителем педагогічної рефлексії особистої діяльності, самоаналізу ефективності різних організаційних форм та методичних прийомів з метою підвищення рівня засвоєння програмового матеріалу учнями, з урахуванням їхніх індивідуальних особливостей.

Емоційно-збережувальна функція спрямована на збереження позитивних емоційних реакцій учнів на допущені помилки та недопущення проявів негативізму, невпевненості у власних силах, байдужості до навчання.

Психологічна функція визначає створення психологічного контакту, встановлення атмосфери довіри, відмову від упередженого ставлення.

Досягнення мети навчання та успішне вирішення поставлених завдань неможливе без урахування загальнодидактичних принципів і закономірностей навчання, психологічних і дидактичних принципів розвивального навчання, психологічних теорій наочності та відповідних моделей навчання. Вчитель повинен дотримуватись принципів та закономірностей навчання. Зокрема, в

умовах організації превентивної діяльності у навчанні математики необхідно враховувати наступні дидактичні принципи:

Індивідуального підходу до учнів. Робота над помилками з математики передбачає роботу над ситуативними помилками кожного учня окремо.

Диференційованого навчання учнів. Превентивна діяльність має бути спрямована на організацію допомоги учням, які відстають у навчанні математики відповідно до ознак цього відставання та з урахуванням особливостей тем, що вивчаються. В умовах класно-урочної системи необхідно здійснювати рівневу диференціацію, використовувати групові й індивідуальні форми роботи, виділяючи типологічні групи учнів, які мають орієнтовно однаковий рівень загального розвитку, навченості, темпу просування у навчанні, цікавості до математики.

Систематичності і послідовності. Превентивна діяльність спрямована на ліквідацію прогалин в знаннях учнів протягом всього періоду навчання. Безпомилкове засвоєння навчального матеріалу на попередньому етапі навчання сприятиме осмисленому вивченню нового матеріалу.

Розвитку мнемічної діяльності. У процесі навчання математики необхідно домагатися запам'ятовування учнями основних означень, тверджень, алгоритмів розв'язання ключових задач, озброювати учнів спеціальними мнемічними прийомами, які полегшують запам'ятовування навчального матеріалу.

Цілеспрямованого формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності. Цей принцип передбачає розвиток мислення, опанування учнями загальними розумовими діями і прийомами розумової діяльності, що сприяє кращому засвоєнню математичних знань та мінімізує кількість допущених помилок у навчанні математики.

Усвідомлення всіма учнями процесу навчання. Забезпечення цього принципу вимагає від учителя математики копіткої роботи з тими, хто не встигає, допускає багато помилок, з'ясування причин цього та організацію своєчасної педагогічної підтримки таких учнів.

Мотивації позитивного ставлення до навчання. Важливою умовою успішного навчання учнів, є наявність певних пізнавальних потреб, позитивних мотивів.

Зв'язку теорії з практикою. Використання задач і вправ практичного змісту повинно сприяти підвищенню інтересу до вивчення математики, допомагати більш осмисленому, глибокому та міцному її засвоєнню.

Заслуговує на увагу система закономірностей в організації навчальної діяльності вчителів та навчальної діяльності учнів, розроблена Я. Й. Грудьоновим [72]. Автор розглядає психолого-дидактичні *закономірності*, в яких розкриваються залежності між зовнішніми умовами навчального процесу та внутрішніми процесами, які відбуваються у свідомості учнів. Знаючи ці закономірності, володіючи методикою їх використання, вчитель математики зможе цілеспрямовано керувати розумовою діяльністю учнів, їхньою увагою, процесом сприйняття та запам'ятовування навчального матеріалу. Зокрема такі:

1. *«Матеріал відносно великого обсягу запам'ятовується неохоче, без бажання»*[72, с.32].
2. *«Якщо матеріал погано зрозумілий, то він запам'ятовується неточно»*[72, с.33].
3. *«Якщо деяка особливість, яка притаманна окремим задачам не відтворена в системі вправ чи в способах розв'язування задач, то в учнів може утворитися помилкова асоціація, в перший член якої не входить осмислення даної особливості»*[72, с.53].

Необхідно відзначити важливість закономірностей формування вмінь та навичок розв'язування задач. Зокрема, знання закономірності Шеварьова дає можливість розробити систему вправ з метою попередження появи типових математичних помилок учнів.

В умовах організації превентивної діяльності вчителя математики доцільно раціонально поєднувати *індивідуальну, колективну, фронтальну, групову та парну роботу* над математичними помилками з метою їх попередження та

вчасного виправлення. Звичайно, в кожному окремому випадку необхідно вибрати найвдаліше поєднання різних форм навчальної роботи.

У структурі методів повинна відтворюватись єдність превентивної діяльності учителя та учня, спрямованої на досягнення поставлених цілей, що стає можливим, якщо діяльність буде певним чином організована, мотивована і підкріплена відповідними стимулюючими впливами; якщо за допомогою контролю і самоконтролю, що визначають рівень наближення до мети, будуть вноситись необхідні корективи в організацію діяльності; і нарешті, якщо будуть створені сприятливі умови для здійснення діяльності. У зв'язку з цим сукупність методів буде відносно цілісною, якщо вона буде складатися з: методів організації і самоорганізації навчально-пізнавальної діяльності; методів стимулювання і мотивації навчання; методів контролю і самоконтролю ефективності навчання.

У виборі *методів* навчання ми дотримуємось думки, що тільки комбінуючи традиційні і сучасні методи навчання математики можна досягти успіхів у роботі. В превентивній діяльності, основним напрямом якої є успішне засвоєння знань з найменшою кількістю допущених помилок, вчитель математики повинен вдало використовувати і пояснювально-ілюстративний метод, основна вимога до якого – пояснення вчителя мають бути зразком для відповіді учнів; метод евристичної бесіди, який має сприяти активізації мисленнєвої діяльності всіх учнів класу; алгоритмічний метод, коли в алгоритм включаються вказівки, спрямовані на необхідність самоконтролю дій, що дозволить попередити типові помилки учнів; метод простих та складніших задач, коли спочатку відпрацьовуються навички розв'язування простих задач, які входять до складу складніших; використання вправ коректувального характеру; забезпечення зв'язку між математичними поняттями тощо.

Серед *засобів* ліквідації прогалин у знаннях учнів під час вивчення математики важливо робити акцент на спеціально організоване повторення навчального матеріалу, з метою встановлення тісного зв'язку між вивченим і новим матеріалом; проведення спеціального усного опитування, з метою виявлення прогалин в знаннях; систему індивідуальних завдань, в ході виконання

яких учні осмислювали б навчальний матеріал, пов'язували теоретичні положення з практикою і від того краще розуміли їх; на роботу над допущеними помилками; на систему вправ з попередження помилок, створену з урахуванням психолого-дидактичних закономірностей; на алгоритмічні приписи та цілеспрямоване використання комп'ютерних технологій.

Важливо сформулювати в учнів здатність до самостійної навчальної діяльності, вагомим компонентом якої є самостійність мислення, яке характеризується наявністю у школярів певних умінь самостійного здійснення основних мисленнєвих операцій, а також такого ставлення до навчально-пізнавальної діяльності, за якого учень прагне не використовувати сторонню допомогу під час виконання навчальних завдань учителя, а виявляє одночасно елементи гнучкості, варіативності, критичності мислення, вольові зусилля у навчанні.

Г. О. Михалін у своїй монографії [168] виділяє педагогічну, психологічну, методичну, інформаційну, математичну, мовну та моральну культуру вчителя математики, визначає знання та вміння кожної з них. Ми погоджуємося з поглядами автора та вважаємо, що необхідно виокремити ще один важливий компонент професійної культури вчителя математики – *превентивну культуру*, яка має визначатися високим рівнем володіння математичними знаннями, умінням передавати ці знання учням, здатністю організовувати діяльність з попередження появи математичних помилок у школярів.

Превентивна культура має включати такі вміння учителя математики:

- *систематизувати помилки, об'єднуючи їх в групи за спільністю причин появи, спільністю методики роботи над ними;*
- *добирати раціональні методи навчання, які б зменшили можливість виникнення помилок, враховуючи індивідуальні особливості учнів, їхні нахили й здібності, ефективно поєднувати традиційні системи навчання з новими;*
- *використовувати сучасні інформаційні технології для діагностики, аналізу та виправлення математичних помилок;*
- *виховувати в учнів критичність мислення, вміння виявляти помилки і неповноту міркувань, будувати контрприклад, узагальнювати результати;*

- організовувати й проводити контроль та самоконтроль навчально-пізнавальної діяльності;
- встановлювати логічні зв'язки між новим і вивченим навчальним матеріалом; постійно дотримуватися принципу наступності у навчанні математики;
- враховувати вікові особливості учнів та будувати навчальний процес як з урахуванням специфіки конкретного матеріалу, так і у відповідності з цими особливостями;
- сприяти свідомому та міцному засвоєнню знань, організовувати поточне і тематичне повторення набутих знань, умінь та навичок з необхідною систематизацією та узагальненням їх;
- постійно вдосконалювати методи і прийоми навчання математики з метою покращання якості знань учнів, викорінення та попередження формалізму в навчанні, а значить і формалізму в знаннях учнів;
- здійснювати на практиці облік та систематизацію математичних помилок учнів, розробляти та здійснювати заходи з попередження та ліквідації цих помилок;
- уміло застосовувати психолого-педагогічні закономірності, зокрема, закономірності формування вмінь та навичок, закономірності засвоєння навчального матеріалу, закономірності пам'яті і мислення;
- здійснювати індивідуальний та диференційований підхід до учнів під час навчання математики;
- розвивати логічне, критичне, творче мислення, вміння здійснювати самоперевірку виконаних завдань, використовуючи різні методи і прийоми.

Отже, для здійснення цілеспрямованих заходів щодо виправлення і попередження помилок учнів, вчителю математики необхідно, по-перше, володіти превентивною культурою вчителя математики, по-друге, систематично вивчати помилки учнів, виявляти найстійкіші й типові з них, вести облік типових та індивідуальних помилок учнів. Знання вчителем типових учнівських помилок, причин їх виникнення і форм вияву дозволить передбачати і попереджати їх появу.

1.3. Психологічні особливості учнів основної школи

Розв'язуючи будь-яку проблему, що торкається учнів конкретного віку, здійснюючи вибір методів, форм, засобів навчання, потрібно знати особливості психіки, властиві саме дітям цього віку.

Підлітковий вік (від 10-11 до 14-15 років) – це один з найважливіших етапів життя людини, для якого є характерним утворення нових зв'язків, структурних поєднань між різними психічними функціями: мисленням, пам'яттю, почуттям, уявою тощо. В ньому багато джерел і починань всього подальшого становлення особистості. Вік цей нестабільний, вразливий, важкий і більше, ніж інші періоди життя, залежить від реальностей довкілля.

У науковій літературі [49], [50], [53], [55], [98], [128], [136], [196], [206], [207] підлітковий вік характеризується як важливий період статевого дозрівання і психологічного дорослішання дитини. Ознайомлення з дослідженнями науковців дозволили нам зробити певні висновки щодо організації превентивної діяльності підлітків.

Згідно з дослідженнями психологів ключовим чинником психічного розвитку в підлітковому віці виступають зміни в самосвідомості і перебудова Я-концепції, зумовлені потребою визначити своє місце серед інших людей. З'являється почуття дорослості, психологічна готовність до нових, вищих вимог. Цей вік характеризується сенситивністю до переходу навчальної діяльності на якісно вищий рівень, коли для підлітка розкривається її новий зміст як діяльності в напрямі самоосвіти та самовдосконалення. У традиційній психології існують три варіанти визначення провідної діяльності в підлітковому віці. Так Д. Б. Ельконін виділив інтимно-особистісне спілкування, Д. І. Фельдштейн – суспільно корисну діяльність, В. В. Давидов – суспільно значущу діяльність [49]. З одного боку, у двох визначеннях наявний один і той же чинник – «суспільність». Справді, діяльність як висхідна форма опановування новим для даного віку змістом, будується завжди як сумісна, тобто певною мірою як суспільна. З іншого – при вивченні підліткового періоду не можна не враховувати прагнення підлітків до спілкування з однолітками.

Сучасні дослідники підліткового віку зійшлися у важливості визначення одного протиріччя. З одного боку, підлітковість – це вік соціалізації, вrostання у світ людської культури та суспільних цінностей, а з іншого – це вік індивідуалізації, відкриття та *утвердження власного унікального і неповторного «Я»*.

Саме у підлітковому віці змінюється внутрішня позиція у ставленні до школи і навчання. Якщо в молодших класах діти захоплені навчальною діяльністю, то в період пубертату їх приваблюють взаємини з однолітками. Головне місце серед мотивів позитивного ставлення до школи займає мотив спілкування з однолітками. Тому під час організації превентивної діяльності необхідно віддавати перевагу *груповим, парним* формам навчання. Пояснюючи один одному незрозумілий навчальний матеріал, виконуючи завдання разом, учні одержують задоволення від належного рівня результативності такої діяльності.

Позитивне ставлення до навчальної діяльності визначається такими способами навчальних дій, які роблять підлітків *незалежнішими, дорослішими у власних очах*. Через самостійні форми занять вони легше засвоюють способи розумових дій. З боку вчителя їм *імponує лише його підтримка чи допомога* [49, с. 215].

Для особистого зростання підлітка особливої значущості набувають знання, які забезпечують розширення кругозору, що дозволяє *набути певного статусу серед однолітків*. Вперше в підлітковому віці виявляється самостійна спрямованість на пошук нових знань. Процес засвоєння знань приносить задоволення підлітку тільки тоді, коли він бачить *життєві призначення* цих знань, і в нього є *інтерес до предмета*. Навчальна мотивація формується на основі пізнавальних потреб і навчальних інтересів.

Підліток з високими домаганнями на *визнання серед однолітків* може досягти такого статусу завдяки міцним знанням. При цьому важливе значення має оцінка його знань.

Потреба в самоствердженні настільки сильна, що заради визнання себе однолітками, *підліток здатний на будь-які вчинки*. На процес самоствердження

впливає *його самооцінка*. Особливості ж самооцінки впливають на емоційне самопочуття і взаємини з оточуючим, на розвиток творчих здібностей і на успіхи в навчанні. За низької самооцінки підліток недооцінює свої можливості і прагне до виконання тільки найпростіших завдань, що заважає його самоствердженню. *За завищеної самооцінки він може переоцінити свої можливості і братися за ті справи, які не в змозі виконати*. Підлітки з низькою і середньою самооцінкою ні до чого не прагнуть, нічого не хочуть, мало на що реагують. Шлях до саморозвитку та самоствердження у цієї категорії підлітків закритий [128]. Тому творчий учитель, орієнтуючись у психологічних особливостях школярів та створюючи ситуацію успіху, здатен підняти самооцінку учнів, допомогти їм відчувати впевненість у своїх здібностях та нахилах, створювати такі ситуації в роботі над попередженням помилок, щоб знайдена вчасно помилка чи здійснена вміло перевірка виконаного завдання викликала задоволення собою.

Основи особистості в підлітковому віці значною мірою закладаються, як стверджував Л. С. Виготський [53], у результаті змін у формах мислення. Підліток опановує процесом створення понять, він переходить до нової форми інтелектуальної діяльності – до мислення в поняттях, воно стає менш предметним і наочним.

Порівняння молодших (11-12 років) і старших (15 років) підлітків у процесі опанування ними математичними поняттями виявило, що молодші підлітки, уміючи визначати істотні властивості об'єктів, мають утруднення в їх знаходженні у нових чи змінених ситуаціях. У старших підлітків ускладнень у визначенні об'єкта у нових ситуаціях, звичайно, не спостерігається.

Молодшими підлітками краще засвоюються поняття, що спираються на адекватно дібрані наочні образи, в яких варіюються неістотні ознаки й постійними є істотні. Через відсутність такої варіації відбувається звужування утворених загальних понять.

З мисленнєвою діяльністю відбуваються зміни, які визначають перехід до абстрактного і формального мислення, значно розвивається теоретичне мислення.

Стає можливою класифікація неоднорідних об'єктів, аналізуються нові сполучення предметів і категорій, вживаються в мовленні абстрактні висловлювання, висуваються різні ідеї, що зіставляються одна з одною різними способами. Логічна система дозволяє підлітку аналізувати, узагальнювати і конкретизувати ситуації, події, що сприяє виконанню завдань на порівняння. Так, наприклад, кращому засвоєнню формул скороченого множення у 7 класі сприяє виконання завдань на порівняння розкриття формул різниці квадратів двох виразів та квадрату різниці двочлена. Враховуючи рівень мислення молодших та старших підлітків, учителю доцільно постійно спрямовувати діяльність на розвиток усіх показників мислення. З метою *попередження помилок пропонувати провокативні задачі, рефлексивні задачі, розкриття софізмів*. Вчителю посилено навчити учнів підліткового віку на своєму рівні використовувати контрприклад для спростування хибних суджень та неправильних доведень під час неправильного використання властивостей, правил чи алгоритмічних приписів. Старші підлітки, в силу психологічних особливостей, повинні навчитись виконувати свої дії правильно та аргументовано відстоювати особисту точку зору.

Особливим досягненням підліткового віку є здатність систематично будувати гіпотези, робити висновки і експериментально перевіряти чи спростовувати, в разі необхідності, їх істинність, що свідчить про пріоритетний розвиток логічного мислення. Тому актуальним в умовах організації превентивної діяльності є розкриття софізмів та парадоксів, розв'язування задач з несформульованим питанням; задач з неповним або надлишковим складом умови; системи задач з поступовою трансформацією з конкретного плану в абстрактний; завдання на складання задач визначеного типу, задач, що мають декілька розв'язків, задач на міркування тощо. Такі задачі потребують творчого підходу, критичної перевірки кожного кроку розв'язування, уміння знайти помилку в міркуванні, яке здається бездоганним. Приклади таких завдань ми пропонуємо в додатках.

На новій інтелектуальній основі формуються нові психологічні механізми, що забезпечують самосвідомість, самооцінку, цілеспрямованість, самореалізацію, саморозвиток. У дітей цього віку складаються нові мисленнєві схеми, що

дозволяють здійснювати формально-логічні операції, не спираючись на чуттєві сприймання конкретних об'єктів. Вони здатні оперувати абстрактними поняттями, розвиваються навички наукового мислення. Підліток навчається рефлексувати на свої розумові дії та операції і переживати від цього інтелектуальні почуття. Як наслідок – задоволення від правильно виконаного завдання і розчарування від нездатності його виконати. Саме в такому віці основним завданням для вчителя є підтримка найменшої ініціативи, заохочення до виконання дій та щедрість на похвалу.

У підлітків виявляється здатність діяти не методом спроб і помилок, а логічним добором варіантів. Вони починають замислюватися над власними думками і думками інших людей, бачити себе очима інших, з'являється впевненість в особистій унікальності. Враховуючи вищеназвані особливості, доцільною буде така організація превентивної діяльності за якої значне місце займуть самооцінка та самоконтроль.

Коли підлітки зустрічаються з труднощами в процесі мислення, не вміють зосередитись, неуважні, тоді з'являються помилки, яких вони не помічають. З метою попередження таких помилок вчителю необхідно на кожному уроці здійснювати добір завдань, спрямованих на розвиток мислення, особливо критичного та самостійного. Зокрема, таких завдань: «Перевір, чи правильно виконано...», « Поясни, чому правильно...», «Яке з тверджень правильне, а яке помилкове...?», « Чи правильно, що...»

Необхідно відзначити, що при незацікавленій позиції підлітка до розумової активності знижується її значущість і прагнення до навчальної діяльності. Для середніх підлітків властивою є схильність до фантазування, їм буде цікаво включатися в діяльність, в якій будуть використовуватись елементи *ейдетики* та *схоластики* для міцного запам'ятовування навчального матеріалу. У такому віці доцільно проводити урок-казку, урок-суд, урок-пригоду, головною дійовою особою якого є помилка. У грі учні можуть викривати помилку, засуджувати її як таку, що призводить до прогалин в знаннях, одержання низьких балів. Вчитель може зацікавити підлітків, оголосивши «полювання» на помилки товаришів.

Відомо, якщо під час виконання завдання учень вміє знайти допущену помилку та виправити її, це свідчить про належний рівень розвитку самоконтролю, здатність до самокорекції. Завдання вчителя – у школярів підліткового віку сформувати та постійно вдосконалювати такі риси.

Розвиток пізнавальних процесів і особливо інтелекту в підлітковому віці має дві сторони – кількісну і якісну. Кількісні зміни виявляються в тому, що підліток розв'язує логічні задачі значно легше, швидше та ефективніше, ніж дитина молодшого шкільного віку. Якісні зміни перш за все характеризують зрушення в структурі мисленнєвих процесів: важливо не те, які задачі розв'язує учень, а як він це робить. Враховуючи це, вчителю необхідно виховувати потребу в раціональних способах розв'язування поставлених завдань. Підтримка та створення учителем ситуації успіху, похвала та висока оцінка раціонального способу розв'язання завдання сприяє прагненню учня до високого рівня знань, безпомилкового засвоєння навчального матеріалу.

У підлітковому віці істотно перебудовується характер навчально-пізнавальної діяльності. Якщо учень ще недавно охоче слухав докладні пояснення нового матеріалу вчителем, то тепер подібна форма знайомства з новим матеріалом можуть викликати нудьгу та байдужість. Більше задоволення приносить самостійна та колективна діяльність. Схильний раніше до дослівного відтворення навчального матеріалу, підліток прагне відтворювати матеріал своїми словами і виявляє протест, якщо вчитель вимагає точного відтворення визначень, формул, законів тощо. Враховуючи це, вчителю необхідно постійно спрямовувати старших підлітків на самостійне набуття знань. Так, наприклад, під час засвоєння теми «Квадратична функція» у 9 класі, можна показати загальний вид квадратичної функції, а побудову графіка та дослідження властивостей даної функції запропонувати учням здійснити самостійно, вибравши при цьому найефективніші форми роботи. Адже давно відомо, що набуті самостійні знання найцінніші і запам'ятовуються назавжди.

Спілкування з однолітками, особисті інтереси і захоплення, розширення зв'язків з навколишнім світом часто знижують інтерес до навчання. Позитивне

ставлення до навчання у підлітків виникає тоді, коли навчання задовольняє їхні пізнавальні потреби, завдяки чому знання набувають для них певного змісту як необхідної і важливої умови підготовки до майбутнього самостійного життя.

Найважливішу істотну роль у формуванні позитивного ставлення підлітків до навчання відіграє зміст навчального матеріалу, його зв'язок з життям і практикою, проблемний і емоційно забарвлений характер викладу, організація пошукової діяльності, що дає учням можливість переживати радість здійснення самостійних відкриттів, опанування раціональними прийомами навчальної роботи, що є неодмінною передумовою для досягнення успіху у навчанні.

У підлітковому віці у процесі навчання формується здатність до аналітико-синтетичного сприйняття предметів і явищ. Підліток сприймає вже не тільки те, що лежить на поверхні явищ, його сприйняття стає плановим і послідовним. Завдання вчителя – «занурювати» підлітка у глибину розуміння виконання дій, формувати вміння розв'язувати завдання осмислено та обґрунтовано.

Процес опанування в підлітковому віці складнішою системою знань впливає на розвиток мимовільної і довільної пам'яті. Засвоєння нового матеріалу потребує переходу від конкретно-логічної пам'яті до абстрактно-логічної. Ускладнення та значне збільшення обсягу навчального матеріалу призводить до якісної перебудови організації мнемічних процесів.

Відбуваються істотні зміни в перебігу логічної пам'яті. Вони підпорядковуються установкам: засвоїти, зрозуміти, розібратися і запам'ятати матеріал. Узагальнені прийоми логічної пам'яті дозволяють підліткам запам'ятовувати пояснення, основні факти, пов'язані з доведенням, судженням, умовиводами. Пам'ять починає характеризуватися достатньо високим рівнем оволодіння складною системою узагальнених знань та вмінням його розуміти і запам'ятовувати. Доступним стає запам'ятовування і збереження абстрактного матеріалу. Пам'ять спирається на опосередкованість, привласнені знакові системи. З метою попередження математичних помилок корисно максимально використовувати візуалізацію навчального матеріалу, на що звертали особливу увагу В. О. Далінгер [77], О. Є. Неліна [180], Н. А. Тарасенкова [240].

Цілеспрямована концентрація уваги учнів на правильних діях під час вивчення навчального матеріалу дозволить осмислено обґрунтовувати кожен крок у виконанні завдань. Засобами візуалізації можуть бути *опорні схеми, піктограми, карти знань, картки корекції знань, алгоритмічні приписи*.

Мова є наймогутнішим засобом пізнавального розвитку підлітків, оскільки вона існує в усному і писемному вигляді. Слово як знак відкриває шлях до опанування символічними процесами та теоретичним мисленням. На думку Г. С. Костюка, майстерне володіння зовнішнім мовленням виражає інтелектуальну силу підлітка, є ознакою його авторитету в колективі. Активно розвивається і внутрішнє мовлення учнів основної школи, яке відображає пошуки адекватних способів передачі своїх думок [128]. Якщо вчитель математики вимагає від учнів правильно, математично грамотно висловлювати свої думки, то і дії цих учнів упорядковані та обґрунтовані, учням не складно пояснити виконання завдання чи обґрунтувати дії на основі правил.

Характерною рисою уваги підлітків є специфічна її вибірковість: цікаві уроки чи цікавий навчальний матеріал можуть захопити підлітків. Однак, легка збудливість, цікавість до яскравого, незвичайного часто є причиною мимовільного перенесення уваги. Виправдовує себе така організація навчального процесу, коли у підлітка немає ні бажання, ні часу, ні можливості відволікатися на сторонні справи, заохочений вчителем математики, учень працює на безпомилковий результат.

Часто вчителі не враховують того, що мислення підлітка набуває нової риси – критичності. Підліток бездумно не спирається на авторитет учителя або підручника, він прагне мати власну думку, схильний до дискусії й заперечень. Щоб не втратити можливості сенситивного періоду потрібно пропонувати учням вирішувати проблемні завдання, порівнювати, виділяти головне, знаходити спільні й відмінні властивості математичних понять, причиново-наслідкові залежності. З метою активізації пошуково-перевірної діяльності під час неправильного розв'язання завдання біля дошки учні повинні перевірити виконане завдання, знайти та виправити допущену помилку. Такий прийом

сприятиме уважності та зосередженості учнів під час виконання інших самостійних вправ.

Отже, як показало дослідження, якщо враховувати психологічні особливості учнів підліткового віку, їхні реальні навчальні можливості, стимулювати позитивне ставлення школярів до навчання, формувати позитивну мотивацію, використовувати ефективні для підліткового віку засоби, методи, прийоми і форми діяльності, спрямовані на попередження, виявлення та виправлення помилок, можна належним чином організувати превентивну діяльність у процесі вивчення алгебри в основній школі.

1.4. Психолого-педагогічні передумови організації і здійснення превентивної діяльності у навчанні алгебри

Розвиток сучасної шкільної освіти пов'язаний з упровадженням компетентнісного підходу до формування змісту освіти, вимог до підготовки учнів та організації навчального процесу. Компетентнісна освіта, що є зорієнтованою на практичні результати, досвід особистої діяльності, вироблення ставлень, зумовлює принципові зміни в організації навчання, яке стає спрямованим на розвиток конкретних цінностей і життєво необхідних знань та умінь учнів. Розглянемо, які психолого-педагогічні передумови важливо враховувати у процесі здійснення превентивної діяльності у навчанні алгебри.

1.4.1. Зміст типових алгебраїчних помилок учнів

Помилки учнів є наслідком цілої низки складних чинників, які перебувають у взаємодії: психіки учня, якості навчання та методичних розробок.

Вдосконалення програм і методів навчання алгебри, як показує практика, не викорінює передумов появи математичних помилок. Засвоєння знань супроводжується помилками внаслідок дії різних чинників, які не завжди можна врахувати під час навчання алгебри.

У великому тлумачному словнику сучасної української мови похибка, помилка трактується як: 1) неправильність у підрахунках, неправильність у діях; 2) неправильна думка, хибне уявлення про щось; 3) некоректність результату яких-небудь дій [46]. «Помилятися означає допускати неправильність у підрахунках, неправильно робити що-небудь, неправильно думати, викривляючи істину, допускати неправильність у передбаченнях, переплутувати що-небудь із чимось подібним» [46, с.855]. Ключовим словом у цьому трактуванні є термін «неправильний», яким характеризують певну дію, яка виконана не за встановленими правилами (чи правилом).

Н. А. Кондаков зосереджує увагу на: 1) помилках у висновках за аналогією; 2) помилках в аргументації питань; 3) помилках поспішного узагальнення; 4) помилках в означенні понять [123].

У словнику В. І. Даля помилкою вважається ненавмисна провина або мимовільне, ненавмисне перекручування чого-небудь [80, с. 231].

У психології під помилкою розуміють неправильність у діях, думках.

У педагогіці робиться акцент на досягненні мети. Помилкою тут вважається результат неправильної (хибної) дії, що не досягла мети.

У нашому дослідженні помилкою вважається відхилення від правильної (еталонної) дії, тобто дещо інша, змінена дія, яка призводить до незадовільного результату. Ми розглядаємо ті помилки учнів, яких вони припускаються під час вивчення алгебри в основній школі.

Прикладами алгебраїчних помилок, наприклад, є:

$$\frac{3a+b}{6c} = \frac{a+b}{2c} \text{ (неправильна дія скорочення дробу);}$$

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c} \text{ (помилка в тому, що не можна дріб } \frac{a}{b+c} \text{ записати у вигляді}$$

такої суми);

$$\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b} \text{ (неправильне винесення змінної з-під знака кореня), правильно}$$

$$\text{так: } \sqrt{a^2b} = |a|\sqrt{b};$$

$$\frac{x}{2x^2 + 3x} = 2x + 3 \text{ (неправильно), правильно так: } \frac{x}{2x^2 + 3x} = \frac{1}{2x + 3};$$

$$(x^3)^2 = x^5 \text{ (неправильно піднесено степінь до степеня), правильно так: } (x^3)^2 = x^6.$$

Учнівські помилки ми умовно поділяємо на *грубі*, *негрубі* й *недоліки*. *Грубими* вважаємо помилки, які вказують на те, що учень не засвоїв основних теоретичних питань теми, або не вміє застосовувати їх до розв'язування задач. Груба помилка спотворює результат дії, який не збігається з еталоном.

До *грубих помилок* відносимо помилки, що свідчать про незнання основних формул, правил, теорем та невміння їх використовувати; про незнання прийомів розв'язування задач аналогічних тим, що раніше вивчені; про невміння складати рівняння за умовою задачі; помилки в обчисленнях, пов'язані з незнанням прийомів і правил виконання дій, помилки в розв'язуванні задач: неправильний вибір дій, пропуск окремих дій, виконання зайвих дій; неправильне формулювання запитань; невідповідність дії запитанню; нерозуміння залежності між величинами в задачі, порушення законів і правил тотожних перетворень тощо.

Прикладами грубих помилок є такі:

а) $10^3 = 30$ (замість $10 \cdot 10 \cdot 10$ виконується множення 10 на 3);

б) $1 - \frac{a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{a+1-a}{a+1} \cdot \frac{a^2-1}{a} = \frac{a^2-1}{(a+1)a}$ (порушено порядок виконання дій);

в) $\frac{x^2-4x}{x^2-6x} : \frac{2x-8}{x^2-36} = \frac{2}{3} : \frac{2(x-4)}{(x-6)(x-6)} = \frac{2}{3} \cdot \frac{(x-6)(x-6)}{2(x-4)} = \frac{(x-6)(x-6)}{3(x-4)}$

1) порушено правило скорочення дробів, 2) неправильно записано $x^2 - 36$ за формулою.

Негрубими вважаємо помилки в обчисленнях чи перетвореннях, допущені внаслідок неувважності; неправильного вживання символів; відкидання без пояснення одного з коренів рівняння чи збереження у відповіді стороннього кореня; записи відповідей у вигляді, що допускають спрощення, порушення вимог

в рисунках тощо. Негруба помилка призводить до результату, який при певних застереженнях може бути прийнятий як задовільний.

До *недоліків* відносимо помилки, які не спотворюють результат. Це можуть бути нераціональні записи під час обчислень, нераціональні прийоми обчислень, перетворень та розв'язування задач; неохайно виконані схеми та рисунки; окремі похибки в формулюванні запитання чи відповіді; описки тощо.

Помилки, пов'язані з неправильним розумінням співвідношень між предметами і явищами дійсності, будемо вважати *фактичними*. Так, наприклад, помилка в знаходженні дискримінанту квадратного рівняння, внаслідок неправильного визначення знаків коефіцієнтів чи вільного члена, є фактичною.

Завдання. Знайти дискримінант квадратного рівняння $2x^2 - 7x - 30 = 0$.

Розв'язання. $D = 49 - 240 = -191$. (Дискримінант знайдено неправильно. Правильна відповідь: $D = 49 + 240 = 289$).

Логічні помилки – це помилки в судженнях, пов'язані з неправильністю думки, тобто із неправильним розумінням зв'язків між самими поняттями. Такі помилки з'являються, наприклад, коли учні теорему плутають з оберненою і протилежною, беруть окремий випадок і роблять з нього неправильний узагальнений висновок тощо.

Завдання. Розв'язати квадратне рівняння $x^2 - 7x + 10 = 0$.

Відповідь учня: «За теоремою Вієта знаходимо корені рівняння: $x_1 = 2$; $x_2 = 5$ ».

Помилка в тому, що корені квадратного рівняння знаходяться не за теоремою Вієта, а за теоремою, оберненою до теореми Вієта.

Якщо помилка допущена ненавмисно, вона вважається *паралогізмом*, якщо правила логіки порушуються навмисно, то це *софізм*.

Г. П. Бевз [12] помилки в розв'язаннях математичних задач поділяє на *алгоритмічні, графічні, термінологічні та ситуаційні*.

Зокрема, *алгоритмічними* автор вважає помилки, пов'язані з неправильним застосуванням алгоритмів під час обчислень, перетворень виразів.

Наприклад: $3^2 = 6$; $-(2a + 3d) = -2a + 3d$; $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + b^4$.

Приклади *термінологічних* помилок: «вільний коефіцієнт», «кубічна функція», «додатне число» тощо. У своєму дослідженні ми дотримуємось термінології, яку запропонував Г. П. Бевз.

У педагогічній практиці часто виникає питання: чому учень помиляється, в чому причина того, що в одних випадках помилка зрозуміла багатьом учням, а в інших, багато з них помилки не помічає? Причина в тому, що іноді неправильні думки подібні до правильних, і чим більша ця подібність, тим важче помітити помилку.

Здатність помічати правильні і неправильні твердження, які висловлено усно чи письмово, *залежить від уваги, з якою учень ставиться до цих тверджень*. Кожен знає: чим більше уваги зосереджується на тому чи іншому предметі, тим більше видно таких подробиць, які при поверховому, неувважному огляді залишаються непоміченими. Ось чому вчителі математики постійно мають вимагати від учнів уваги, що дає змогу відразу після пояснення нового матеріалу відтворити його.

Часто логічні помилки з'являються тому, що в учня не вистачає об'єктивності визнати за хибне те, що є хибним насправді. Свідомо чи несвідомо учень під впливом своїх інтересів, прагне зробити одні висновки і відкинути інші. Це призводить до того, що в міркуваннях, висновки яких відповідають їхнім бажанням, учень може не помітити навіть грубої логічної помилки, а в міркуваннях, що суперечать його інтересам, порівняно легко помічає найменшу нелогічність.

З аналізу літературних джерел впливає, що помилки доцільно об'єднувати в групи за декількома ознаками, а саме: 1) *за характером вияву*; 2) *за змістом*; 3) *за причинами виникнення*.

Так, за характером вияву алгебраїчні помилки будемо поділяти на *випадкові*, які з'являються не систематично в окремих учнів, та *типові (систематичні)*, які характеризуються неодноразовою появою та масовістю. Зазвичай випадкові помилки свідчать про незнання чи недостатнє засвоєння учнями певної алгебраїчної дії і пов'язані, головним чином, із послабленням уваги (контролю)

під час виконання цієї дії, а типові є наслідком неправильного засвоєння навчального матеріалу чи невмінням застосовувати цей матеріал до виконання конкретної дії. У нашому дослідженні значна увага приділяється саме типовим алгебраїчним помилкам учнів, організації превентивної діяльності з їх попередження ще на початку вивчення змістових ліній як необхідної умови безпомилкового засвоєння наступного навчального матеріалу. Про це детальніше піде мова в другому розділі дисертації.

У зміст помилки входить те, що неправильно виконано в діях учнів. Якщо за основу прийняти зміст помилок, то вони будуть розподілені згідно зі змістовими лініями курсу алгебри, а такий розподіл типових помилок охоплює їх більшість і тому особливо корисний як для учнів, так і для вчителів. Вважаємо, що вивчення математичних помилок не повинно закінчуватись виявленням того, що неправильно виконав учень, а має бути продовжено і спрямовано на знаходження відповіді на питання: чому він допустив помилку та які обставини є причиною помилкової дії? Зупинимося на цьому детальніше.

1.4.2. Психолого-педагогічні чинники виникнення учнівських помилок під час вивчення алгебри

Навчальна діяльність учителя та навчальна діяльність учнів дає позитивний результат тільки в тому випадку, якщо ця діяльність стає сумісною, спрямованою на міцне та глибоке засвоєння навчального матеріалу. В умовах організації превентивної сумісної діяльності вчителя та учнів, метою якої є діагностика, профілактика та попередження помилок учнів під час вивчення алгебри в основній школі надзвичайно важливим є виявлення причин появи цих помилок. Враховуючи характер та причини появи помилок, вчитель математики зможе знайти шляхи їх попередження та виправлення.

Аналіз психолого-педагогічної та методичної літератури свідчить про те, що виявлення причин виникнення багатьох помилок є процесом важким і не завжди вдалим. У психолого-дидактичному аналізі учнівських помилок, побудованому на підґрунті психолого-дидактичних закономірностей, враховуються як внутрішні процеси навчальної діяльності учнів, так і зовнішні умови, що впливають на ці

процеси. Тому такий аналіз дозволяє точніше виявляти причини помилок і планувати заходи з їх попередження [72].

Причини виникнення учнівських математичних помилок розглядали у своїх роботах А. К. Артемов [6], В. О. Далінгер [77, 79], Я. Й. Грудьонов [70, 71, 72], І. М. Кирилецький [118], Н. О. Менчинська [163], З. І. Слєпкань[230, 231], П. О. Шеварьов [262, 263, 264] та ін.

Використовуючи результати досліджень В. О. Далінгера [77, 79], стисло зупинимось на причинах математичних помилок взагалі і дамо характеристику цих причин з урахуванням особливостей курсу алгебри основної школи.

1. *Причини, пов'язані з психологічними чинниками (ослаблення психічних функцій: уваги, пам'яті, мислення):*

- домінування асоціативних зв'язків над смисловими;
- інтерференція навичок, коли формування одних навичок гальмується іншими.

2. *Причини, що впливають з недоліків навчальних програм і підручників:*

- у тексті підручників алгоритми і правила вводяться без розгляду необхідної кількості прикладів;
- у підручниках переважає одноманітність завдань;
- у системі завдань не витримано оптимальне поєднання завдань, розв'язування яких вимагає репродуктивної і продуктивної діяльності;
- відсутні завдання, що допомагають учню усвідомити спосіб розв'язування (завдання рефлексії);
- система вправ у підручнику не забезпечує належної пропедевтичної і закріплюючої роботи;
- виконання завдань не сприяють розвитку навичок самоконтролю.

3. *Причини, обумовлені недосконалістю організації навчального процесу:*

- немає роботи вчителя по попередженню в учнів прагнення до автоматичного застосування фактів, що вивчаються;
- в учнів не формуються навички самоконтролю, які необхідні для розвитку діяльності рефлексії;

– проводиться недостатня підготовча робота для усвідомленого засвоєння матеріалу, не продумано його доцільне закріплення і зв'язок з подальшим матеріалом;

– у навчальному процесі часто використовуються лише готові завдання; учнів не вчать складати завдання самостійно;

– завдання переважно використовують для закріплення готових знань або для їх повторення.

4. Причини, обумовлені не володінням на необхідному рівні синтаксисом і семантикою математичної мови. Вони поділяються на такі групи:

1) причини, пов'язані з невмінням учнів працювати з означенням понять, що призводить до таких помилок:

- пропуск необхідних слів у визначенні родового поняття;
- пропуск необхідних слів в означенні поняття;
- помилки, пов'язані з тавтологією у визначенні понять;
- вказівка як видова ознака неістотних властивостей понять і тому подібне.

2) причини, пов'язані з недостатньою логічною підготовкою учнів:

- не розуміють суті диз'юнкції і кон'юнкції висловів;
- недостатньо усвідомлюють поняття логічного проходження;
- не уміють будувати заперечення висловів;
- не уміють робити порівняння, класифікацію понять.

На нашу думку, автор розглянув важливі причини появи помилок. Ми у своєму дослідженні їх враховуємо, однак додамо, не менш важливу причину поширеності помилок у процесі навчання алгебри – це відсутність методичних вказівок та практичних розробок, спрямованих на організацію превентивної діяльності вчителя математики у навчанні учнів алгебри.

Учитель повинен знати не тільки, чого навчати учнів та як навчати: знати різні методи формування понять, доведення теорем, розв'язування задач, знати переваги і недоліки кожного методу, а й уміти передбачати, як той чи інший метод сприймають учні, які помилки вони допускають, як їх виправити. Важливо

допомогти учневі самостійно знайти помилку, усунути її, запобігти появі інших помилок.

Причини обумовлені недосконалістю організації вчителем навчання алгебри та недоліки програм і підручників потребують додаткового дослідження. Метою нашого дослідження є вивчення причин помилок, які допускають учні, опановуючи алгебру. Розглянемо детальніше психологічну природу виникнення учнівських помилок у процесі навчання алгебри.

Поряд з біологічною можливістю опанування знаннями, вміннями та навичками, що передається за спадковістю, рівень опанування матеріалом тісно пов'язаний з досягненнями того чи іншого ступеня міцності засвоєння знань. Враховуючи те, що процес засвоєння є психологічною стороною навчання, важливе значення має дослідження різних зв'язків психологічних процесів у навчанні школярів.

На нашу думку, серед причин появи алгебраїчних помилок є психологічні особливості розвитку когнітивних процесів учнів основної школи. Зокрема, появі помилок сприяють: відсутність та послаблення уваги, мало розвинена пам'ять, поганий зір, недоліки мислення, відсутність волевих зусиль, швидка втома, поспішність у роботі, нервовість. До дидактичних причин появи алгебраїчних помилок відносимо причини, що впливають із *особливостей сприйняття навчального матеріалу та його відтворення*, наприклад: поверхове сприймання та недостатня чіткість у відтворенні; прагнення до використання завченого і звичного; автоматичне використання завченого і поспішність в узагальненнях; вплив набутих навичок на утворення нових (інтерференція навичок); негативне перенесення одних навичок на інші; недооцінка значення первинного сприйняття матеріалу для міцності його засвоєння; відсутність ретельності в підготовці першого самостійного відтворення алгебраїчного матеріалу; захоплення механічним відтворенням (механічне повторення) навчального матеріалу; відсутність цілеспрямованості в запам'ятовуванні; недостатнє поєднання аналізу і синтезу під час закріплення матеріалу і слабкий розвиток спостережливості; неправильна аналогія і домінування асоціативних зв'язків над смисловими;

недостатньо розвинене логічне та критичне мислення; формальне засвоєння матеріалу; невміння пов'язувати попередній матеріал із наступним, здійснювати внутріпредметні зв'язки; відсутність мотивації.

В умовах організації превентивної діяльності учитель має не тільки навчати, а й керувати процесом засвоєння учнями знань. Результат здійснення такого керівництва значною мірою залежить від того, наскільки вчитель розуміє структуру психічної діяльності школярів у конкретних умовах навчання.

Психологами встановлено, що причиною виникнення помилок є пригнічення одних слабших асоціацій, іншими, сильними і звичними асоціаціями, особливо асоціаціями за суміжністю. Аналізуючи причини помилок, яких припускаються сучасні школярі, вивчаючи алгебру, ми також врахували відомі положення, обґрунтовані в роботах П. О. Шеварьова про те, що кожна типова помилка допускається у двох випадках:

- 1) *коли в учня актуалізується деяка помилкова асоціація;*
- 2) *коли в учня не повністю, частково актуалізується правильний ланцюг асоціацій.*

Для виправлення помилкових дій у першому випадку вчителю доцільно вчасно виявити помилкову асоціацію, яка актуалізувалася в мисленні учня, провести діагностику появи такої помилки, вказати шляхи її усунення та заміни правильною асоціацією.

Якщо асоціація не помилкова, то учні допускають випадкові помилки. У цьому випадку слід перевірити склад і міцність усіх ланок правильної асоціації, знайти відсутню ланку та за допомогою спеціально дібраних вправ виправити помилку. Детальніше на цьому питанні ми зупинимося в другому розділі.

Значному зменшенню кількості типових алгебраїчних помилок учнів сприяє виявлення психологічної природи тих чи інших асоціацій, знання закономірностей їх формування і вияву. Це дає можливість цілеспрямовано керувати їх утворенням, вчасно попереджати й виправляти можливі помилкові асоціації, які актуалізувалися у мисленні учнів.

На думку І. П. Павлова, тимчасові зв'язки-асоціації є універсальними явищами, які лежать в основі всіх шкільних знань, умінь та навичок, і навчання полягає у створенні тимчасових чи умовних зв'язків, тобто так чи інакше зводиться до формування у кожного школяра певних асоціацій.

За висновками відомих психологів Д. Н. Богоявленського [34], Н. О. Менчинської [163], С. Л. Рубінштейна [210, 211], легко засвоюється те, що може бути включено в уже сформовану систему асоціацій.

На думку П. М. Ерднієва [269], мистецтво навчання полягає в закріпленні правильних, потрібних і своєчасному відсіванні неправильних, непотрібних асоціацій.

Дослідження А. К. Артемова [6], Я. Й. Грудьонова [72] та ін. показали, що утворені помилкові асоціації можуть виявлятися значно пізніше, під час вивчення наступних тем певних змістових ліній.

Ми погоджуємося з А. К. Артемовим та Я. Й. Грудьоновим і вважаємо, що для успішного вивчення алгебри учнями з мінімальною кількістю помилок, вчителю під час виконання завдань школярами необхідно своєчасно виявляти помилкові асоціації та формувати правильні.

Навчити учнів розв'язувати алгебраїчні задачі – означає сформувати у них міцні, а й за необхідності, легко відновлювані асоціації. Для цього важливо знати закономірності їх утворення:

– *під час розв'язування типових вправ у школярів досить швидко /іноді після двох-чотирьох/ формуються узагальнені асоціації. Наступні вправи цього ж типу учні розв'язують через їх актуалізацію;*

– *під час виконання вправ одного і того ж типу відбувається зміна валентності деяких компонентів навчального матеріалу: осмислення одних особливостей знижується, а інших зростає. При цьому в учнів можуть формуватися помилкові асоціації, пов'язані з тим, що в їх зміст не входять деякі компоненти, необхідні для правильного розв'язання завдань даного типу, або входять якісь інші особливості [72].*

Для формування у школярів правильних узагальнених асоціацій необхідною умовою є варіювання (зміна) несуттєвих ознак навчального матеріалу і зберігання суттєвих. Тому, *виходячи з асоціативно-рефлекторної теорії навчання в дослідженні причин помилкових дій учнів, ми виявляли такі особливості навчального матеріалу, які впливають на формування відповідних помилкових асоціацій.*

В умовах організації превентивної діяльності під час вивчення алгебри в основній школі вчителю математики важливо знайти відповіді на основні питання психології шкільних знань, умінь та навичок:

1. Які саме асоціації лежать в основі того чи іншого знання, того чи іншого достатньо високого уміння чи навички? Інакше кажучи, які саме асоціації повинні бути відпрацьовані в учнів, щоб у них виникли певні знання, уміння та навички?

2. Яких психологічних принципів потрібно дотримуватись під час побудови такої методики навчання, яка найекономніше приведе до відпрацювання таких асоціацій?

3. Які саме асоціації, що мають істотне значення для відпрацювання певних знань, умінь та навичок, вже сформовані в учнів перед вивченням нового матеріалу?

4. Які саме асоціації виникають в учнів на різних етапах засвоєння даного розділу? Як ці асоціації залежать від змісту і побудови підручника, від методики вивчення і повторення навчального матеріалу тощо?

Всі ці питання тісно пов'язані між собою, і обґрунтована відповідь на них – це шлях до попередження помилок під час засвоєння навчального матеріалу. Очевидно, що результат організації превентивної діяльності з попередження та ліквідації помилок з алгебри значною мірою залежить від правильного визначення справжніх причин появи цих помилок.

Ми погоджуємося з думкою Ю. А. Самаріна [216], що асоціації формуються у діях. У шкільному курсі алгебри розв'язування задач займає значне місце, тому причиною багатьох помилок є неправильно сформовані асоціації в попередніх діях, у виконанні попередніх вправ. Для попередження таких помилок необхідно

знати причини їх виникнення та умови, необхідні для правильного виконання учнями конкретного завдання. Укорінена помилка учня, яка свідчить про недостатній рівень засвоєння теми, не осмислена і не виправлена ним самим вчасно в майбутньому зможе неодноразово повторюватись.

Зіставлення правильного і помилкового розв'язання дозволяє визначити, відсутність якої саме умови призводить до помилки, і чому ця умова відсутня взагалі.

П. О. Шеварьовим було доведено, що узагальнена помилкова асоціація утворюється, якщо в процесі діяльності учнів виконуються три умови:

- 1) *учень виконує завдання одного типу;*
- 2) *в цих завданнях незмінно повторюється деяка особливість;*
- 3) *усвідомлення цієї особливості не обов'язкове для одержання правильного результату.*

Формування помилкової асоціації і призводить до появи помилок під час розв'язування задач і вправ. На нашу думку, пояснення причин появи алгебраїчних помилок з погляду асоціативно-рефлекторної теорії є найбільш вдалим і обґрунтованим, саме такого пояснення ми і притримуємось в нашому дослідженні.

Розглянемо приклад. Часто у молодих вчителів виникає питання: чому, знаючи правило скорочення дробів, учні не завжди правильно його використовують?

Припускаючись помилок, часто учні так виконують спрощення:

$$1) \frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b} \qquad 2) \frac{4x^2 + x^2y}{x - y^2x^2} = \frac{4x + 1}{1 - y}$$

Розглянемо детальніше, що сприяло появі таких помилок за умови, що учні вміють правильно виконувати спрощення виразів: 3) $\frac{ac}{bc}$; 4) $\frac{4x^2 \cdot y^2}{6x^2y^2}$.

Виділимо спільне, наприклад, у виразах 1) $\frac{a+c}{b+c}$ і 3) $\frac{ac}{bc}$:

1) змінні в чисельнику першого дробу такі ж, як і змінні в чисельнику другого дробу; 2) змінні в знаменнику першого дробу такі ж, як і змінні в знаменнику другого дробу; 3) в кожному з виразів є дія ділення.

Специфічними особливостями є те, що у виразі 1) чисельник і знаменник є сумами, а у виразі 3) – добутками таких самих змінних.

До виконання вищезгаданих завдань учні навчилися правильно скорочувати дробу: $\frac{24 \cdot 5}{16 \cdot 5}$; $\frac{32 \cdot 25}{50 \cdot 38}$; $\frac{4x^2y}{y^2x^2}$, тому що у підручниках достатня кількість завдань такого типу. При цьому у них актуалізувалась безпосередня асоціація, першим членом якої є осмислення якихось не специфічних особливостей виразу даного типу, а другий член асоціації – це дія ділення на спільні дільники. Учні осмислювали і специфічні особливості, однак це осмислення було невалентним, тобто нестійким. Це значить, що учні, які допустили вказані помилки під час спрощення виразів:

$$1) \frac{a+c}{b+c} = \frac{a}{b}; \quad 2) \frac{4x^2 + x^2y}{x - y^2x^2} = \frac{4x^2 + 1}{1 - y}$$

не звернули увагу на знак «+» у чисельнику і знаменнику.

Для виявлення причин утворення вказаної помилкової асоціації ми проаналізували завдання з підручників, які пропонуються до вивчення теми: «Скорочення дробів» у 6 та 8 класі. В основному, у вправах на скорочення звичайних чи раціональних дробів завдання містили в чисельнику і знаменнику дію множення, тому не було необхідності осмислення цієї дії. Отже, сформувалась помилкова асоціація, пов'язана з осмисленням дії в чисельнику і знаменнику під час скорочення дробів, а саме те, що чисельник і знаменник є добутками і скорочувати можна тільки на *спільний множник*.

Отже, на даному етапі навчання формується помилкова асоціація, яка не виявляється під час вивчення теми «Скорочення звичайних дробів» у 6 класі. Проте її існування негативно виявляється пізніше, зокрема, під час спрощення виразів

$\frac{3x+2+3xy+2y}{2y-2+3xy-3x}$, розв'язування рівнянь $\frac{x^2}{2x-16} + \frac{48-2x}{8-x} = 6$, доведення

тотожностей $\frac{a+b}{a+(a-b)} = \frac{a^3+b^3}{a^3+(a-b)^3}$ у наступних класах, скорочення раціональних дробів під час складання ДПА та ЗНО.

Необхідно звернути увагу на те, що правило скорочення дробу часто закріплюється в пам'яті дітей як ділення на спільне число. Тому, помітивши спільне число в чисельнику і знаменнику дробу, учні часто закреслюють його, що призводить до грубої математичної помилки.

Помилковою буде думка, що під час виконання завдань типу спростити вираз: $\frac{4x^3 + x^2y}{x - y^2x^2}$ учні зовсім не помічають специфічних особливостей таких виразів. Тим більше, що вчитель неодноразово звертає увагу на ці особливості. Але під час розв'язування багатьох вправ осмислення специфічних особливостей не було обов'язковим, тому за закономірністю П. О. Шеварьова ці особливості не закріпилися.

Отже, знаючи склад і причини формування помилкових асоціацій, можна вжити заходи, спрямовані на їх попередження. Насамперед потрібно відповідним чином дібрати систему вправ, які б сприяли формуванню правильних асоціацій. Зокрема, під час скорочення дробів потрібно увагу учнів звернути на ту особливість, що скорочувати дріб можна тільки на спільний множник, а якщо в чисельнику чи знаменнику є дія відмінна від дії множення (додавання чи віднімання), то важливо розкласти чисельник і знаменник на множники, тобто подати у вигляді добутку, і тільки тоді виконувати скорочення.

Під час розв'язування однотипних вправ і задач школярі механічно розв'язують наступні за аналогією з попередніми, не міркуючи та не вникаючи в пояснення, що стає причиною появи помилок.

Розв'язування задач з алгебри повинно вчити учнів мислити та формувати важливі особливості їх мислення. Тому потрібно, щоб з одного боку, процес розв'язування будь-якої задачі був конкретизацією засвоєних узагальнених операційних систем, а з другого боку – після розв'язування був проаналізований сам процес розв'язання, в результаті якого повинні бути узагальнені деякі

структурні особливості розв'язування та оцінений спосіб розв'язування з точки зору новизни, оригінальності, раціональності, можливості інших способів.

1.5. Психолого-педагогічні основи організації превентивної діяльності вчителя математики

У превентивній діяльності ми пропонуємо використовувати і комбінувати усі відомі нам методи навчання: пояснювально-ілюстративний, проблемний, продуктивний, репродуктивний, дослідницький, евристичну бесіду тощо. Найпоширенішими традиційно залишаються пояснювально-ілюстративний метод та евристична бесіда. Практична підготовленість, як відомо, – головний критерій доцільності навчання й одночасно – найважливіший показник навченості. Основна мета такої діяльності – збільшення часу активної самостійної (тренувальної) роботи кожного учня. Відповідно до законів навчання, в умовах високої концентрації уваги й активності, великого обсягу самостійно виконаних вправ коефіцієнт засвоєння (правильного виконання завдань) може досягати значного рівня. У дослідженні ми дотримуємося методики І. П. Підласого [193].

Превентивна діяльність містить у собі сім етапів, які ми умовно назвали:

- *пропедевтична підготовка;*
- *зв'язок засвоєних знань із новими;*
- *безпомилкове засвоєння учнями нового навчального матеріалу;*
- *осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах;*
- *самостійна робота під керівництвом учителя в класі;*
- *самостійна робота;*
- *домашня самостійна робота.*

Необхідно відзначити, що важливою складовою превентивної діяльності є поточна діагностика і моніторинг знань учнів. У процесі навчання варто проводити ґрунтовну перевірку знань і навичок учнів, здійснювати діагностування, щоб упевнитися, що школярі мають достатні основи для подальшої успішної роботи з вивчення теми. Постійне спостереження за процесом навчання, динамікою змін, що здійснюється за спеціальною програмою моніторингу, гарантує стабільний розвиток процесу

навчання і гарантований результат. Розглянемо детальніше кожен із вказаних вище етапів.

Призначенням пропедевтичної підготовки, є виявлення рівня знань та умінь, засвоєних на попередніх навчальних заняттях. На початку уроку вчителю математики доцільно запропонувати учням завдання (тест), виконання якого засвідчить, чи можна приступати до вивчення нового матеріалу. Це завдання може бути коротким, інформативним, складність якого не вища від складності домашнього завдання, з «родзинкою», що дозволить виявити рівень готовності школярів до успішного продовження навчання. За результатом виконаного завдання учитель приймає рішення – чи приступати до вивчення нового матеріалу, чи зупинитися на повторенні і закріпленні раніше вивченого.

Другий етап навчального процесу – зв'язок засвоєних знань із новими. На цьому етапі задаються характеристики майбутнього навчального заняття і матеріалу, який буде вивчатися далі. Учитель має роз'яснити свої сподівання, чітко викласти мету, визначити обсяг і структуру майбутньої роботи, інформувати, у який спосіб будуть фіксуватися та оцінюватися результати, здійснювати забезпечення завдань, вказівок, упереджень, провокативних вправ, спрямованих на запобігання типових помилок учнів. Структура цього етапу така:

- повідомлення змісту уроку, встановлення зв'язків між новими і вивченими знаннями;
- пояснення нового матеріалу на основі вивченого.

Третій етап – засвоєння учнями нового навчального матеріалу. Учитель має робити усе, що для цього необхідне, – пояснювати, ілюструвати, наводити приклади, працювати над упередженням помилок учнів. Доцільно пропонувати учням самим робити певні відкриття, створювати навчальні ситуації і вирішувати їх разом з учнями. Якщо це новий навчальний матеріал, то докладно обговорюються усі нові поняття, даються їм визначення, формулюються правила і наводяться приклади. Якщо це нове уміння, то визначаються і чітко викладаються всі кроки його формування. Кожен крок обов'язково ілюструється прикладами.

Важливо не тільки повідомити інформацію усно, але максимально прояснити її

за допомогою наочних засобів, щоб в учнів на цій стадії вивчення матеріалу склалися міцні зорові асоціації. Візуальна репрезентація навчального матеріалу орієнтовно для однієї третини учнів найдоцільніша. Для «візуалів», тобто дітей, які тяжіють до образного сприйняття, наочність відіграє головну роль у розумінні й засвоєнні вивченого, для всіх інших буде важливою підмогою на шляху повного розуміння. Учитель повинен з'ясувати, чи всі учні правильно розуміють візуальну інформацію, чи немає розбіжностей у тлумаченні побаченого. На цьому етапі актуальним є використання елементів ейдетики, складання невеличких віршиків для запам'ятовування, складання карт знань, виконання завдань, що провокують на помилку, розкриття цих помилок, наведенням контрприкладів, упередження помилок різними засобами. Формуються правильні асоціації. Етап завершується перевіркою розуміння всього навчального матеріалу.

Головне для вчителя – установити рівень готовності учнів до осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах. Учитель з'ясовує:

- Чи можуть усі учні безпомилково пригадати усі поняття, терміни, про які йшла мова?
- Чи можуть учні своїми словами повторити зміст правил чи теорем?
- Чи можуть пригадати, кроки (пункти) і їх послідовність, що входять до щойно вивченого матеріалу (уміння)?
- Чи можуть учні знаходити відповіді на поставлені питання в тексті підручника?

Бажано на цьому етапі повторення нових відомостей кілька разів, поступово згортаючи інформативний ресурс, щоб головне було висвітлено максимально повно і прозоро, зрозуміло всім та сприйнято у повному обсязі і безпомилково.

Четвертий етап – осмислення та закріплення вивченого матеріалу на прикладах. Спершу вчитель аналізує разом з учнями приклади. Практичні завдання виконуються спочатку всім класом, потім у підгрупах, трійках і парах. Ефективною підмогою, що супроводжують цей етап роботи, можуть бути мультимедійні засоби. Так, наприклад, презентацію можна використати і для пояснення перебігу розв'язування завдання і для запису алгоритму, і для перевірки виконаного учнем біля дошки завдання покроково.

Слушним на цьому етапі навчання є використання додатку «Plickers», цінність його в тому, що зчитування GR-кодів з карток учнів відразу повідомляє інформацію про рівень засвоєння нового програмового матеріалу. Використовуючи «Plickers», учитель може постійно підтримувати зворотний зв'язок, вчасно реагуючи на всі відповіді учнів. Правильні відповіді підтримуються, неправильні – аналізуються і виправляються. Важливого значення в роботі з помилками учнів ми надаємо використанню програмних педагогічних засобів, зокрема GRAN-1, GeoGebra, AGrapher, MathCad. Не можна забувати про візуальну підтримку, усі учні мають розуміти, що зображено на схемах, вміти складати схеми самостійно. Вони можуть використовувати зображення (карти знань, графіки, моделі, ілюстрації, схеми, таблиці, діаграми тощо), створені самостійно та занотовані в особистому довіднику як підказку, коли будуть діяти самостійно. Саме на четвертому етапі превентивної діяльності учителю необхідно долучити до роботи всі засоби, спрямовані на упередження та недопущення помилок (детально про це ми будемо говорити в розділі 2 дисертації).

Наступний етап – самостійна робота під керівництвом учителя. Робота учнів на цьому етапі дозволяє учителеві оцінити їхню здатність самостійно виконувати навчальні завдання з теми. Учні мають можливість попрактикуватися в присутності педагога. Аналізу підлягають кількість і типи допущених помилок. Учитель діє як тьютор, надаючи допомогу тим, хто її потребує. Прилучає до роботи з помилками самих учнів, влаштовує бій помилкам.

Шостий етап – цілком самостійна робота у класі. Мета самостійної роботи полягає в тому, щоб закріпити нове знання, забезпечити його запам'ятовування на тривалий період часу. Під час самостійної роботи учні виконують практичні вправи без допомоги вчителя. Роль учителя – своєчасна перевірка робіт учнів. Визначається, чи залишився рівень точності виконання завдань на належному рівні. За результатами визначається необхідність допомоги й додаткових занять для тих учнів, хто цього потребує.

Сьомий етап – домашня самостійна робота. Учитель визначає обсяг домашньої роботи, необхідної для безумовного закріплення вивченого і набуття навичок. Своїх

цілей учитель досягає не перевантаженням, збільшенням обсягу вправ, а системою – перспективою подальшого формування навичок через аналіз вивченого в контексті подальшого набуття нових знань.

Розглянемо особливості організації і здійснення навчально-виховного процесу, спрямованого на засвоєння знань, умінь та навичок учнів з алгебри з мінімальною кількістю помилок.

Після того, як учитель поставив запитання, а учень на нього відповів, настає реакція педагога на отриману відповідь. Учитель не залишає не виправлених помилок і не сповіщає відразу правильну відповідь, якщо учень помилився. Для виправлення відповідей використовуються спеціальні методи, наприклад, вчитель пропонує учню пояснити, як він виконував завдання та за допомогою контрприкладів та питань підводить учня до того, що він сам зрозуміє помилковість дій, або ж пояснюється матеріал заново.

Крім цього, діяльність учнів на уроках алгебри організовується у високому темпі. Учень змушений стежити за поясненням, він не має можливості відволікатися. Щоб домогтися ще більшого ефекту, надається більше можливостей відповідати на запитання самим учням. Одержуючи правильну відповідь, вчитель ставить перед учнями нові, складніші запитання. На ранніх стадіях навчання, коли правильна відповідь дається «навмання», учитель кілька разів перефразовує запитання, доти його «крутить» перед класом, поки не буде цілком упевнений, що всі учні все зрозуміли.

Якщо учень припускається *механічної помилки*, учитель просто поправляє його і йде далі. Якщо неправильна відповідь указує на те, що учень не зрозумів, то вчитель спершу намагається підказати йому чи натякнути. За незадовільного результату пояснення розпочинається заново. Важливо допомагати учням розібратися в ситуації й навчити *самостійно виправляти свої помилкові* відповіді.

Ефективний зворотний зв'язок завжди має навчальну мету. *Обов'язково необхідно підкреслити, що було зроблено правильно.* У зворотному зв'язку може бути похвала, але важливо, щоб вона ґрунтувалася на якості відповіді. Щоб досягти ефективності, зворотний зв'язок повинен бути своєчасним і коригуючим.

Необхідність спочатку давати учням докладні пояснення і проводити з ними практичні вправи і тільки після цього переходити до самостійних завдань, може здатися очевидною. Однак спостереження показують, що учнів часто змушують працювати з підручником або іншими матеріалами, практично не даючи їм попередньо ніяких пояснень чи підказок. Для того, щоб перейти до самостійного виконання завдання, учень має достатньо опанувати алгебраїчним матеріалом.

У превентивній діяльності навчання алгебри в основній школі важливо переходити до виконання самостійних практичних завдань тільки тоді, коли точність відтворення (вироблення навички) у класі досягає 70%. Діти самостійно працюють над завданнями від 50 до 70% часу уроку. Якщо прагнути, щоб більша частина уроку дійсно була орієнтована на засвоєння знань, то учні не повинні відволікатися. Не миттєвий і швидкозгасний інтерес, а воля, свідомо вихована увага, старанність повинні допомагати їм у цьому.

Підвищенню ефективності безпомилкового навчання сприяють:

- Багаторазове відточування, «шліфування» умінь і навичок. Мета будь-якої практики полягає в тому, щоб домогтися майстерності, тобто здатності користатися навичкою незалежно і безпомилково. Формуючи навичку, учитель проводить учня через різні стадії практики, що характеризуються різним ступенем допомоги з його боку. Таке навчання потрібне, щоб забезпечувати необхідну підтримку учня доти, поки він не досягне рівня самостійного володіння відповідними знаннями, уміннями. Метод відточування окремих блоків знань гарантує від помилок на ранніх стадіях вивчення матеріалу, коли уразливість пам'яті ще дуже висока і легко може запам'ятатися неправильний досвід та сформуватися неправильні помилкові асоціації. Буває, і нерідко, що початкова помилка надалі призводить до перекручування всієї інформації.

- У процесі навчання вчитель більше забезпечує коригувальний зворотний зв'язок, вчасно виправляючи допущені помилки і закріплюючи правильно засвоєне. Коли учні вже можуть виконувати роботу з достатньою точністю, то це значить, що вони готові до самостійної роботи. Допомога їм уже не потрібна.

- Збільшення тривалості виконання практичних завдань. Наші дослідження

дозволяють стверджувати, що чим більше часу у сукупності виділено на практичне відпрацювання матеріалу, чим більше можливостей попрактикуватися, тим триваліший період зберігаються знання і навички у пам'яті.

– Інтенсивне спостереження за роботою кожного школяра під час самостійної роботи. Це робиться для того, щоб *помилки*, допущені на цій стадії навчання, не закріпилися і надалі не перешкоджали навчанню. Необхідний постійний коригувальний зворотний зв'язок, щоб помилки не осіли в пам'яті. Інформація про те, як діяти правильно, запобігатиме помилковим асоціаціям вже на ранній стадії навчання. Це допомагає знизити рівень тривожності учнів: виконуючи практичні вправи, вони будуть упевнені, що в разі потреби їхні дії будуть негайно скориговані. Важливо не тільки запобігати появі *помилки* на ранній стадії, але й мати повне уявлення про динаміку формування правильної навички.

– Якщо рівень точності виконання завдань у більшості учнів досягне 75-80%, можна переходити до наступного рівня самостійної роботи. Стежачи за коефіцієнтом точності, можна бути впевненим, що діти будуть закріплювати успішний досвід, а не помилки.

– Рівномірний розподіл практичних вправ на увесь період навчання. Відомо, що без повторення вивченого протягом 24 годин забувається дві третини отриманої інформації. Але якщо упродовж тривалого проміжку часу (наприклад, 3-4 місяці) регулярно проводити повторення вивченого алгебраїчного матеріалу, то можна домогтися переходу в довгострокову пам'ять майже всієї нової інформації. Найпоширеніша помилка – учитель математики припиняє виконання вправ, якщо досягнуте перше безпомилкове виконання. Для якісного навчання алгебри необхідні регулярні повернення до найважливішого матеріалу.

Якщо вчитель математики буде дотримуватися вище запропонованих психолого-педагогічних умов організації превентивної діяльності, успішність учнів значно покращиться, робота спрямована на попередження помилок буде ефективною. Більш детально форми, методи, засоби такої діяльності та методичні прийоми спрямовані на попередження математичних помилок учнів у навчанні алгебри ми розглянемо у розділі 2.

Висновки до першого розділу

1. Дослідження превентивної діяльності в галузі педагогіки й психології переконують, що даний напрям, в силу його актуальності й перспективності, необхідно використовувати й під час вивчення алгебри в основній школі. Під превентивною діяльністю вчителя математики розуміємо навчальну діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та, обрати необхідні методи, організаційні форми та засоби навчання математики.

2. Основною метою превентивної діяльності під час навчання алгебри є організація найсприятливіших умов для вивчення програмового матеріалу, переходу школярів від розуміння матеріалу до стійкого його засвоєння, осмислення та закріплення, що сприятиме зменшенню кількості неуспішних учнів. До дій превентивної діяльності ми відносимо: *аналіз, попередження, виправлення математичних помилок.*

3. У процесі здійснення превентивної діяльності вчителі математики мають успішно реалізувати такі її функції: *діагностична, прогностична, попереджувальна, стимулююча, навчальна, коригуюча, розвиваюча, виховна, методична, емоційно-збережувальна та психологічна.*

4. В умовах організації превентивної діяльності необхідно враховувати такі важливі дидактичні принципи: індивідуального підходу до учнів, диференційованого навчання, систематичності й послідовності, розвитку мнемічної діяльності, цілеспрямованого формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності, усвідомлення всіма учнями процесу навчання, мотивації позитивного ставлення до навчання, зв'язку теорії з практикою.

5. Для того, щоб навчання математики було ефективним та сприяло попередженню помилок учнів, необхідно знати не тільки склад і методику формування правильних асоціацій, але й причини формування помилкових асоціацій, адже помилкові асоціації мають здатність проявлятися значно пізніше, під час вивчення наступних тем курсу математики.

6. Плануючи превентивну діяльність як повноцінну діяльність, необхідно враховувати особливості психічного розвитку учнів підліткового віку, сформованості у них уваги та уяви, сприймання та пам'яті, мислення та мовлення.

7. Для здійснення цілеспрямованих дій для виправлення і попередження помилок учнів з алгебри учителю математики необхідно, по-перше, володіти превентивною культурою, по-друге, систематично вивчати помилки учнів, виявляти найстійкіші й типові з них, вести облік розповсюджених та індивідуальних помилок учнів. Знання вчителем типових учнівських помилок, причин їх виникнення і форм вияву дозволить передбачати й попереджати їх появу.

Основні результати першого розділу опубліковані у роботах [18 - 32]

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ПОПЕРЕДЖЕННЯ, ВИЯВЛЕННЯ ТА ВИПРАВЛЕННЯ ПОМИЛОК УЧНІВ У НАВЧАННІ АЛГЕБРИ

2.1. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Вирази і дії над ними»

Методична система попередження математичних помилок учнів містить всі компоненти, які виділяє у навчальному процесі сучасна педагогіка: цільовий, стимулюючо-мотиваційний, змістовий, операційно-діяльнісний, контрольнорегулятивний, оцінювально-результативний [1].

Розглянемо функціонування такої системи у процесі вивчення змістової лінії «Вирази», яка складається з двох розділів: «Цілі вирази», що вивчається у 7-му класі та «Раціональні вирази», що вивчається у 8-му класі.

Враховуючи загальні завдання навчання математики, визначені у Державному стандарті базової і повної загальної середньої освіти [86], цілі вивчення математики в основній школі та очікувані результати до рівня загальноосвітньої підготовки учня [202, 203], нами визначено окремі цілі й завдання превентивної діяльності (див. п.1.2.), організованої вчителем математики, спрямованої на глибоке та міцне засвоєння знань учнів у процесі вивчення змістової лінії «Вирази».

Вчитель як модератор навчальної діяльності учнів під час вивчення теми «Вирази», повинен:

- знати «тонкі місця» в навчальному матеріалі, де можлива поява помилок та вчасно попереджувати їх появу;
- формувати компетентність учнів, спрямовану на недопущення ситуативних та типових помилок у вивченні кожної теми даного розділу;
- організовувати систему дій на недопущення помилок та виправлення допущених помилок;
- формувати уміння безпомилкового виконання тотожних перетворень буквених виразів: розкриття дужок, зокрема дужок, перед якими стоїть знак «мінус»; правильного визначення коефіцієнтів біля змінних; зведення подібних

доданків, зокрема доданків, які мають числові коефіцієнти різних знаків;

– прагнути глибокого розуміння поняття одночлена та многочлена, вироблення навичок правильного зведення одночленів і многочленів до стандартного вигляду;

– формувати вміння та навички учнів правильного виконання додавання і віднімання многочленів, множення многочлена на одночлен, множення многочленів;

– прагнути засвоєння учнями поняття степеня з натуральним і цілим показником та формувати вміння безпомилкового застосовування властивостей степенів до обчислення та спрощення виразів;

– забезпечити ґрунтовне вивчення учнями формул скороченого множення та вміння використовувати їх у спрощенні виразів, доведенні тотожностей та розв'язуванні рівнянь;

– сприяти виробленню осмислених дій розкладання многочленів на множники різними способами: винесенням спільного множника за дужки, способом групування, використанням формул скороченого множення;

– формувати вміння учнів безпомилково скорочувати раціональні дроби, зводити дроби до нового (спільного) знаменника та виконувати дії над дробами;

– прагнути осмисленого виконання учнями тотожних перетворень раціональних виразів.

Змістовим компонентом методичної системи запобігання та попередження математичних помилок ми вважаємо **типові помилки учнів та причини їх виникнення у процесі вивчення змістової лінії «Вирази»**.

Розглянемо організацію превентивної діяльності, спрямованої на попередження та недопущення помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Вирази», зокрема тем «Цілі вирази» та «Раціональні вирази».

2.1.1. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Цілі вирази»

Необхідною умовою ефективної превентивної діяльності є знання вчителем поширених помилок учнів, які вони допускають під час вивчення теми «Цілі вирази».

За результатами проведення великої кількості контрольних зрізів (констатувальний експеримент), анкетувань учителів математики, аналізу відповідної методичної літератури, упорядкування та осмислення власного досвіду, нами були встановлені емпіричним шляхом такі найпоширеніші помилки учнів під час вивчення теми «Цілі вирази» і причини їх появи:

Під час піднесення до степеня одночлена учні:

– коефіцієнт основи степеня множать на показник степеня:

$(2x^2y^2)^3 = 6x^6y^6$. Причиною такої помилки є неправильна аналогія дії піднесення до степеня з дією множення (інтерференція);

– підносять до степеня тільки коефіцієнт основи: $(6m^2n)^2 = 36m^2n$.

Причиною появи цієї помилки є перенесення знань, щодо множення одночлена на число та незнання правила піднесення до степеня добутку;

– коефіцієнт основи не підносять до степеня, наприклад: $(3x^2y^3)^3 = 3x^6y^9$.

Причина в тому, що під час множення одночленів сформувалась помилкова асоціація. Тому під час піднесення до степеня учні підносять лише один із множників, а в кращому випадку всю буквену частину одночлена. Якщо не викоринити та не попередити появу таких помилок, вони можуть з'являтися під час піднесення ірраціональних виразів до степеня та розв'язуванні ірраціональних рівнянь;

– показники степенів додають або підносять до степеня, наприклад:

$(x^3y^2)^2 = x^5y^4$; $(2a^2b^3)^2 = 4a^4b^9$. Такі помилки є наслідком поверхового знання правил піднесення до степеня добутку і правил піднесення степеня до степеня.

Досить часто учні порушують правило розкриття дужок, особливо, якщо перед дужкою стоїть знак «мінус», наприклад: $(5x-1)-(-1+3x) = 5x-1+1+3x = 8x$. Причиною таких помилок є формально

завчені правила розкриття дужок та нераціонально дібрана вчителем система вправ на осмислення та закріплення правил.

Типовими є помилки, які виникають під час множення многочлена на одночлен: $c(2x+b) = 2xc+b$; $(a+b-c) \cdot 4a^2 = a+b-4a^2c$. Розкриваючи дужки, учні множать на одночлен тільки той член многочлена, який знаходиться поряд. Це свідчить про те, що вивчення розподільної властивості множення відносно додавання відбулося на формальному рівні.

Розповсюдженою помилкою є втрата знаків коефіцієнтів алгебраїчних виразів. Часто учні вважають нульовими коефіцієнти одночленів: a^2c ; $-bc^2$. Причиною є несформовані вміння учнів визначати коефіцієнт одночлена. Зокрема, втрата з поля зору знаку коефіцієнта призводить до помилок в діях над одночленами і многочленами, а в подальшому – в розв'язуванні лінійних та квадратних рівнянь.

Значною кількістю помилок супроводжується зведення подібних доданків, зокрема учні:

– коефіцієнти додають, а буквені вирази знищують, наприклад:

$$7a - 2a = 5; 7x^2 - 3x^2 = 4.$$

– додають і коефіцієнти і показники степенів, наприклад $3x^2 + 2x^6 = 5x^8$;

$$15y^5 - 3y^4 = 12y.$$

– коефіцієнти додають, а буквені вирази перемножують, наприклад:

$$4x + 7x = 11x^2.$$

Причиною таких помилок є те, що учні не усвідомили поняття змінної, не розуміють, що замість букв можна підставляти будь-які числа, а тому зводять подібні доданки несвідомо.

Під час множення одночленів учні:

– знаходять добуток тільки коефіцієнтів, наприклад: $12x^2y7x^2y = 84x^2y$;

– множать кожен коефіцієнт окремо, наприклад:

$$3c^2b \cdot 4ca \cdot 2b = 12 \cdot 6c^3b^2a = 72c^3b^2a;$$

- перемножують показники степенів, наприклад: $x^2y^4 \cdot 4x^2y^2 = 4x^4y^8$;
- під час піднесення одночлена до степеня знаходять добуток коефіцієнта на показник степеня; показники степенів додають: $(3a^2b^4)^2 = 6a^4b^8$;
- під час множення многочленів не використовують розподільну властивість множення, наприклад: $(2a+3b)(4c+5a)=8ac+15ab$.

Помилки $(a \pm b)^2 = a^2 \pm b^2$; $(a \pm b)^3 = a^3 \pm b^3$ з'являються, якщо під час піднесення до степеня многочлена використовується хибна розподільна властивість. Помилкова асоціація, яка сформувалась під час вивчення розподільної властивості множення відносно додавання сприяла неправильній аналогії. Причиною таких помилок є зовнішня схожість виразів $(a+b) \cdot 2$ та $(a+b)^2$.

З метою попередження таких помилок, які досить часто з'являються під час вивчення формул скороченого множення та у подальшому використанні цих формул, доцільно під час множення многочленів розглянути завдання на піднесення двочленів до 2 та 3 степенів. Звернути увагу учнів на те, що кількість членів результату до зведення подібних буде 2^n , а після зведення подібних завжди буде більше показника степеня двочлена на одиницю. Такий попередній підрахунок викликає інтерес, і є певним засобом стійкого засвоєння формул.

Розкладаючи многочлени на множники учні:

- втрачають одиницю при винесенні спільного множника за дужки, наприклад: $8x^3 + 4x^2 - 2x = 2x(4x^2 + 2x)$. Причиною є невідпрацьований алгоритм винесення спільного множника за дужки і нерозуміння того, що результатом ділення виразу сам на себе є одиниця;

- не завжди доводять перетворення до кінця, наприклад: $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)$;

- помиляються у знаках під час винесення за дужки від'ємного множника, наприклад: $ac - bc - a^2 + 2ab - b^2 = ac - bc - (a^2 + 2ab - b^2)$, що є наслідком не сформованих умінь розкривати дужки та при необхідності заключати вирази в дужки;

– допускають помилки у завданнях на використання формул, наприклад:

$$а) a^2 - b^2 = (a - b)(a - b); \quad б) a^3 - b^3 = (a - b)(a - b)(a - b);$$

$$в) a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 + b^2); \quad г) a^2 + b^2 = (a + b)(a + b); \quad д) (a + b)^2 = a^2 + b^2.$$

Це свідчить про формальне засвоєння формул скороченого множення.

Зокрема, поширеною є *помилка* у нерозмежуванні виразів «сума квадратів» і «квадрат суми». Учні швидко запам'ятовують, що в обох виразах спільними є слова «квадрат» і «сума», що і призводить до помилки.

Часто учні допускають помилку $a - b = b - a$, що стає у подальшому причиною помилок у зведенні до спільного знаменника раціональних дробів. Тому, ще на етапі вивчення правил розкриття дужок необхідно планувати діяльність так, щоб учні цілком свідомо і безпомилково виконували перетворення: $a - b = -(b - a)$.

Труднощі виникають: у виділенні спільного множника в запису многочлена та обчисленні показників степеня членів многочлена, які залишаються в дужках після винесення спільного множника за дужки; виділенні формули скороченого множення в даному многочлені, наприклад: $4a^2 - 6ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$. Причиною появи таких помилок є порушення принципу повноти в системі тренувальних вправ.

Здійснюючи аналіз помилок, вчителю необхідно з'ясувати, які умови забезпечать правильне виконання завдання і які чинники можуть викликати його помилкове виконання.

Виходячи з асоціативно-рефлекторної теорії П. О. Шеварьова [262], учень може зробити помилкову дію у двох випадках: якщо в нього актуалізується правильний ланцюг асоціацій, але актуалізується не повністю, відсутня певна ланка, або якщо в учня актуалізується помилкова асоціація. Завдання вчителя у першому випадку – перевірити склад і міцність усіх ланок у правильному ланцюгу асоціацій, у другому – виявити помилкову асоціацію, що актуалізувалась у мисленні учня та замінити правильною асоціацією.

Відомо, що якщо дві події відбуваються близько в часі чи просторі, то на основі сформованого зв'язку у людському мисленні, під час настання однієї з них,

людина очікує другої. Так і при розв'язуванні математичних задач: якщо із суб'єктивної точки зору конкретна задача, чи її частина, здається учню схожою до розв'язаної раніше, то він переносить, елементи відомої задачі на нову, не помічаючи суттєвої відмінності між ними.

Враховуючи специфіку вивчення алгебри, зокрема те, що рівень вивчення кожної наступної теми певної змістової лінії прямо залежить від рівня засвоєння вивченого навчального матеріалу на попередньому етапі, *пояснення нового матеріалу слід будувати на основі повторення, узагальнення і систематизації відомого, необхідно здійснювати постійний зв'язок між вивченим і новим.*

У процесі вивчення нових понять (тверджень) корисно пов'язувати їх з уже відомими, визначати загальні суттєві ознаки в характеристиці нових і відомих понять.

Помилки з'являються ще й тому, що математика вимагає чіткості означень, послідовності міркувань, правильності висновків. А учні намагаються охопити навчальний матеріал лише пам'яттю. Тому вчителю треба зменшити використання таких форм роботи коли знання передаються в готовому вигляді. Треба, щоб матеріал вивчався під час напруженої розумової діяльності. Перш ніж сказати «тому що» або «звідси» треба, щоб в учнів виникло запитання «чому?» або «звідки?». Важливими факторами попередження помилок є формування навичок самостійної навчальної діяльності учнів, засвоєння методів, способів і умінь користуватися цими навичками в процесі розв'язування різних типів математичних задач.

Розглянемо детальніше найпоширеніші помилки учнів у процесі вивчення теми «Одночлени».

Як показало наше експериментальне дослідження, значну кількість помилок школярі допускають під час запису одночлена в стандартному вигляді та у виконанні дій додавання та множення одночленів. Причиною появи таких помилок є недостатньо сформоване поняття степеня та невміння правильно застосовувати властивості степенів.

Так, виконуючи тотожні перетворення виразів учні не розмежують дії добутку степенів та піднесення степеня до степеня, допускають помилку:

$$(a^m)^n = a^{m+n} (*)$$

Практика показує, що з метою попередження такої помилки під час вивчення властивостей: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$, $m, n \in N$; $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$, $m, n \in N$ необхідно закріпити в пам'яті учнів особливості даних виразів, вказавши на *спільне* та *відмінне* в них.

Примітка! Детальний розгляд нами зроблено зумисне, щоб роз'яснити зміст таких помилок та причини їх появи на основі асоціативно-рефлекторної теорії П. О. Шеварьова. Надалі така деталізація нами опускається.

Згідно асоціативно-рефлекторної теорії П. О. Шеварьова [262, 264], причиною появи помилки (*) є зовнішня схожість виразів $a^m \cdot a^n$ і $(a^m)^n$, $m, n \in N$ і помилковий асоціативний зв'язок, який сформувався під час вивчення властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$. Тому, з метою попередження помилки $(a^m)^n = a^{m+n}$, $m, n \in N$ ще на етапі засвоєння властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$, необхідно звернути увагу учнів на *специфічну особливість* формули $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$ тобто на те, що *між степенями – дія множення, а в результаті показники степенів додаються*.

Більшого ефекту можна досягти, працюючи *фронтально* із класом та залучаючи всіх учнів. Школярі повинні самі виділити згадану вище особливість, проговорити її та підкріпити прикладами.

Необхідно відзначити, що у підручниках є достатня кількість завдань на закріплення властивості $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$, що сприяє її стійкому запам'ятовуванню.

Після введення властивості $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$; $m, n \in N$, доцільно також проаналізувати з учнями *особливості* цієї рівності, зокрема *наявність дужок, показника степеня за дужками, добутку показників степенів у правій частині рівності*.

Наступний етап – порівняння обох вивчених властивостей. Учні повинні або самі, або за підтримки вчителя виділити, що спільного та відмінного вони помітили, *суттєві* особливості обов’язково зафіксувати в зошитах чи спеціально відведених довідниках.

Як відомо з досліджень психологів, 80% інформації людина отримує через зоровий аналізатор. Для попередження математичних помилок учнів ми пропонуємо максимально використовувати *візуалізацію* навчального матеріалу, що забезпечить цілеспрямовану концентрацію уваги учнів на правильних діях, виділенні спільного і відмінного в формулах (особливо в місцях, де найчастіше виникають труднощі в учнів) під час вивчення нового матеріалу. Засобами візуалізації можуть бути опорні схеми, карти знань, піктограми.

Прикладом є піктограма на запам’ятовування спільного і відмінного у властивостях степенів:

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; m, n \in N$$

$$\square^\Delta \square^\nabla = \square^{\Delta+\nabla}$$

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}; m, n \in N$$

$$(\square^\circ)^\square = \square^{\circ \cdot \square}$$

Для стійкого запам’ятовування її необхідно розмістити у правому верхньому куті дошки та залишити на весь урок.

Засвоєння школярами нової теми буде ефективнішим, якщо під час виконання вправ вони будуть вголос проговорювати орієнтовну основу дій. Наприклад: *під час множення степенів з однаковими основами показники додаються; під час піднесення степеня до степеня – показники степенів множаться.*

Виділення спільного і відмінного у новому матеріалі сприяє розвитку уваги учнів і спрямованості на пошук таких характеристик під час вивчення кожної теми.

Формулювання загальних висновків на основі аналізу конкретних ситуацій (використання індуктивних міркувань), здійснених самими учнями за наслідками власної діяльності, сприяє міцнішому засвоєнню нових знань та запобіганню помилок з цієї теми у майбутньому.

Якщо не звернути увагу учнів на особливість кожної з властивостей $a^m \times a^n = a^{m+n}$; $m, n \in N$, $(a^m)^n = a^{m \times n}$; $m, n \in N$, то вони будуть бачити тільки спільне, а, отже, використовувати частіше будуть ту властивість, яка вивчалась першою.

Закріплення згаданих вище властивостей доцільно здійснювати дібраною ефективною системою усних та письмових вправ.

Особливістю усних вправ є те, що вони повинні бути спрямовані на формування в учнів уміння **визначати назву певної властивості та записувати її у вигляді формули, а також називати властивість, записану формулою**, уміння перевіряти виконані перетворення, обчислюючи значення даних і одержаних виразів.

З досліджень психологів та практичного досвіду вчителів відомо, що виконання учнями вправ одного типу послаблює їхню увагу. Тому систему письмових тренувальних вправ, запропонованих у підручниках, доцільно доповнювати вправами, в яких враховуються психолого-педагогічні закономірності навчання математики. Зокрема, закономірності формування умінь та навичок розв'язування задач, закономірності уваги та сприйняття, закономірності мислення тощо.

Знаючи, як порушити деякі закономірності, вчитель може провокувати учнів на помилки, і тим самим спонукати думати та контролювати всі свої дії.

У ході дослідження ми перевірили ефективність використання прийому провокації учнів на помилку, враховуючи **закономірність**:

якщо при вивченні нової теми виконуються умови:

- 1) *учневі пропонують завдання тільки одного типу;*
- 2) *виконання кожного з них зводиться до однієї й тієї ж операції;*
- 3) *цю операцію (її результат) учневі не доводиться вибирати серед інших, які можливі в подібних ситуаціях;*
- 4) *дані завдань не є для учня незвичними;*

5) він упевнений в безпомилковості своїх дій і вже під час виконання 2-го або 3-го завдання перестав згадувати і застосовувати правила, формули чи теореми, не обґрунтовує розв'язування завдань.

Щоб спровокувати учня на помилку, потрібно однотипні вправи згрупувати по дві-три. За вказаною вище закономірністю третю, з цих вправ учень виконає не обґрунтовано, а механічно, тому в четвертій вправі обов'язково допустить помилку. Помилку необхідно проаналізувати, і виправити. У цей час впевненість у безпомилковості дій в учня порушиться. Тому у виконанні наступних вправ він буде діяти обачніше, стане уважнішим.

Якщо помилка і не допускається, то все одно активність мисленнєвої діяльності зростає.

До вправ на відпрацювання властивостей степенів ми пропонуємо включати вправи із попередніх тем, які зовні схожі і є «провокативними».

Наприклад. Подайте, якщо можливо, у вигляді степеня:

$$1) 4^3 \cdot 4^5; 2) a^5 \cdot a^7; 3) x^4 \cdot x^6; 4) c^3 + c^5; 5) (3^4)^2; 6) (-a^9)^2; 7) (-b^5)^4;$$

$$8) (-2)^5 + (-2)^4; 9) (-2^3)^4 \cdot (-2)^7; 10) (3^2)^4 \cdot 3^3; 11) (c^2)^5 \cdot c^4; 12) (7^2)^5 + 7^4.$$

Тут перші три вправи одного типу, в них повторюється одна властивість (розглядається добуток степенів з однаковими основами), яку учень може не усвідомлювати, якщо діє за аналогією. У результаті усвідомлення цієї особливості послаблюється, і в прикладі 4) учень допускає помилку: $c^3 + c^5 = c^8$.

Помилка не залишається поза увагою інших учнів. Зростає інтерес. Послаблюється самовпевненість учнів у безпомилковості своїх дій. У результаті наступні вправи учні виконують уважніше та вдумливо. Але через деякий час увага знову послаблюється, тому що вправи 5 – 7 знову одного типу, і деякі учні знову допустять помилку у вправі 9. Після цього інтерес і мисленнєва діяльність ще більше підсилюється, тому у завданні 12 помилку майже ніхто не допустить.

Певного емоційного забарвлення попередженню помилок надають інтерактивні технології, змагання за найменшу кількість помилок. Важливу роль відіграють нестандартні уроки: «Суд над помилками», «Прикрощі від помилок»,

написання творів «Я і мої помилки», «Як помилки заважають успішності», казки про помилки тощо.

Важливою є робота по закріпленню вивченого матеріалу. Так, закріпити властивості степенів допоможе стратегія «Взаємні питання». У 7 та 8 класі доцільно використовувати картки взаємоопитування учнів. В силу психологічних особливостей підлітків така діяльність їм подобається, стимулює до вивчення правил та формул. Ефективною є робота в парах по знаходженню та виправленню допущених помилок один в одного. Таким є прийом «Упіймай помилку». Знаходження учнями помилок доцільно стимулювати та заохочувати різними засобами. Наприклад, встановити ціну знайденої помилки. Це може бути додатковий один або два бали до поурочного балу, залежно від теми.

Найбільше задоволення учні отримують, якщо знаходять «помилки» вчителя. Методичний прийом «Знайти помилку вчителя» сприяє активізації мисленнєвої діяльності, виховує бажання знати більше та якісніше. Звичайно, такий прийом ефективний, якщо вчитель, неначе ненароком допускає помилки. Однак, якщо і не буде помилок на дошці, вимога «знайти помилку» вселяє в учнів впевненість в обов'язковій наявності помилки. Тому її пошук стає особливо наполегливим, а обґрунтування відсутності помилки є найусвідомленішим.

Якщо під час виконання завдання біля дошки учень допустив помилку, варто зупинити виконання завдання та запропонувати знайти свою помилку та виправити її, якщо ж учень не помічає власної помилки, на допомогу приходять всі учні класу, і хто перший знайде помилку та обґрунтує її одержує додатковий бал. Такий прийом впливає на увагу та зосередженість учнів, активізує розумові зусилля. Учні глибше розуміють навчальний матеріал, зростає впевненість, якій сприяють слова підтримки вчителя.

Вже на початку вивчення властивостей степенів, важливо провести діагностичну самостійну роботу з виявлення рівня засвоєння нового матеріалу. Перевірку її можна здійснити, наприклад, так: почергово заслухати відповіді учнів, не вказуючи на правильну відповідь, потім попросити підняти руку тих учнів, у кого дійсно правильна відповідь. Так учитель зможе виявити рівень

засвоєння навчального матеріалу та спланувати подальші дії в превентивній діяльності.

Ефективним засобом в боротьбі з помилками є математичний диктант. Проаналізувавши виконання диктанту, вчитель одержує детальну інформацію про рівень засвоєння навчального матеріалу як окремими учнями, так і класу в цілому, що у свою чергу дозволяє оперативно ліквідувати прогалини в їхній підготовці. До завдань математичного диктанту потрібно включати як властивості степенів, так і завдання на повторення. Приклад такого диктанту пропонуємо в Додатку Б.

Важливе значення в організації превентивної діяльності мають короточасні самостійні роботи, ми називаємо їх «п'ятихвилинками». Метою таких робіт є перевірка засвоєння формул, властивостей, теорем. Ефективним є використання тестова перевірка знань з комп'ютерною підтримкою та перевірка знань за допомогою GR-кодів. З практики навчання математики відомо, що якщо систематично здійснювати перевірку залишкових знань на початку кожного уроку, учні чекають такої перевірки, краще готуються до уроку вдома.

Щоб відпрацювати безпомилкове засвоєння формули піднесення добутку до степеня, під час використання якої часто допускаються учнями помилки, необхідно детально розглянути її особливості та акцентувати увагу учнів на тому, що в дужках добуток одночленів.

Властивість $(ab)^n = a^n b^n$; $n \in N$ можна записати як: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$; $n \in N$.

Як відомо, сприймається та запам'ятовується та інформація, яка засвоюється легко, із задоволенням. **Для кращого запам'ятовування корисно використовувати секрети ейдетики** («ейдос» - образ): залучити фантазію. *Формулу можна оживити, запропонувавши учням уявити, що дужки це будинок, в якому живуть брати, а n - сонечко над будинком. Прокинувшись вранці і вийшовши з будинку, кожен із братів побачить сонечко.*

Уява допомагає уникати помилок, сприяє запам'ятовуванню навчального матеріалу, яскраві образи залишаються в пам'яті назавжди. Учні охоче навчаються, якщо вчителю вдається включати їх в активну навчальну діяльність,

тому важливе місце в організації роботи з попередження помилок займає вдале мотивування, позитивне, яскраве забарвлення уроку, заохочення, стимулювання та створення ситуацій успіху. Використовуючи різні прийоми запам'ятовування, розвиваючи пам'ять учнів, вчитель полегшує роботу учнів, робить її цікавішою, що прискорює процес засвоєння знань.

Згідно з ученням І. П. Павлова, в основі засвоєння навчального матеріалу лежать тимчасові зв'язки. Знання набуваються за асоціацією і утримуються в пам'яті тільки певний період. Для зміцнення і систематизації знань, для засвоєння їх на триваліший час дуже важливо з фізіологічної точки зору попередити згасання цих знань, збагатити і зміцнити попередні зв'язки. Тимчасові зв'язки в корі головного мозку кожного учня виникають і згасають згідно з законами, які регулюють процеси збудження і гальмування. У різних учнів це відбувається по-різному і залежить від запасу попередніх знань, а також активної самостійної розумової діяльності учнів на уроці. Якщо засвоєні на уроці знання учень самостійно не закріпить певною кількістю вправ, то набуті нові знання і створені на їх основі тимчасові зв'язки через деякий час зникають.

У своєму дослідженні ми пропонуємо акцентувати увагу вчителя на виконанні учнями творчих вправ. Характер мисленнєвих процесів різко зміниться, якщо замість завдання, наприклад, піднести до степеня $(3a^2b^3)^2$ поданого у звичному вигляді, запропонувати деформовану вправу, типу: знайдіть одночлен, який піднесли до квадрату $(\square)^2 = 9a^4b^6$. Експериментально доведено, що виконання другого завдання ґрунтується на пошуках відсутніх ланок замкнутого кола умовиводів, через аналіз всього ланцюга, що перетворює мисленнєвий процес у складніший, змістовніший і тому краще розвиває здібності учнів.

Такі завдання розвивають навички самоконтролю, який здійснюється довільно, а іноді навіть не осмислено. На відміну від звичайних вправ, коли самоконтроль здійснюється після нагадування, у виконанні деформованих вправ контроль є необхідною складовою.

Корисними є обернені задачі. Вони об'ємніші ніж прямі, однак виконання обернених розвиває у школярів уміння виконувати і прямі перетворення: записаний один приклад, а під час його розв'язання випробувано декілька варіантів, тобто розв'язано не менше трьох-чотирьох прикладів.

У попередженні помилок важливу роль відіграє рівень мислення школярів. Обернені задачі є ефективним засобом, що спонукає активізацію мисленнєвої діяльності учнів, змушує їх розглядати питання, що вивчається з різних точок зору.

Наприклад, під час вивчення властивості $a^m \times a^n = a^{m+n}; m, n \in N$ разом із вправами, які спрямовані на безпосереднє використання цієї властивості, варто пропонувати і обернені завдання:

1. Запишіть степінь x^8 у вигляді добутку двох множників.
2. У рівності $xa^3 = a^9$ замінити x степенем так, щоб одержати рівність, правильну для всіх значень змінної a .

На навчальному етапі під час піднесення степеня до степеня в умовах диференційованого підходу послідовність вправ із зростанням степеня складності:

- а) 2^3 ; б) 4^3 ; в) $(\frac{2}{3}a^5)^2$; г) $(\frac{2}{3}a^5)$; д) $(0,2xy^4)^2$ для сильніших учнів доцільно

доповнити, наприклад, завданням на визначення x у виразах:

- а) $x^2 = a^4$; б) $x^2 = 9^2$; в) $x^2 = 49$; г) $x^2 = 9^2 a^8$; д) $x^4 = 81a^{12}$.

Учні із зацікавленням виконують останнє завдання, хоча і не знають, що розв'язують рівняння. Після певної кількості спроб та перевірок в умі можуть одержати правильний результат.

Для виправлення та попередження багатьох помилок особливо важливо сформулювати у школярів навички самоконтролю. Ці навички складаються з двох частин: **а) вміти виявити помилку; б) вміти її виправити.**

З метою формування навичок самоконтролю, вчителю варто навчити учнів **перевіряти правильність виконання дій та одержаних результатів.** Школярі мають вміти перевіряти власні дії виконанням обернених дій, здійснювати перевірку підставлянням замість змінних конкретних числових значень.

Як відомо, те, що легко запам'ятовується, швидко забувається. Активна мисленнєва діяльність над навчальним матеріалом, його розуміння, установка на запам'ятовування («під час використання формул старайтесь їх запам'ятати, на завтра потрібно вивчити напам'ять») сприяє кращому та ефективнішому засвоєнню даного матеріалу. Тому вчителю необхідно протягом вивчення наступних тем пропонувати учням вправи на виконання всіх дій із степенями.

Учні, які засвоїли нову тему, можуть виконувати складніші завдання, працюючи в групах, а зі слабкішими учнями вчителю в цей час потрібно попрацювати індивідуально, уже не в фоновому режимі, а вказуючи на помилки та виправляючи їх. Аналогічні завдання до тих, в яких учні допустили помилки потрібно включити в домашнє завдання, і з перевірки саме цих завдань розпочати наступний урок.

Одночлени. Безпомилкове множення одночленів, піднесення одночлена до степеня, запис одночлена в стандартному вигляді, значною мірою залежить від належного рівня засвоєння властивостей степенів. Тому на етапі актуалізації знань необхідно повторити всі властивості степенів, записані як в прямому, так і зворотному порядку, виконати систему підготовчих вправ. З цією метою можна використати презентації, опорні схеми, прийоми ейдетики.

Щоб підвести учнів до розуміння поняття «одночлен», на дошці доцільно записати кілька виразів, наприклад: 7 ; $3ab^4$; b ; $-\frac{8}{11}$; $4a^3(-5)c$; $\frac{1}{3}a^2b$; c^5 . Потім з допомогою запитань допомогти встановити *суттєву* ознаку одночленів, за якою вони відрізняються від інших видів виразів: одночлени – це числа, змінні, їх степені і добутки. На слові добутки необхідно акцентувати увагу. Крім того, варто виділити *несуттєві ознаки*: числовий множник може бути цілим і дробовим числом, додатнім і від'ємним, може дорівнювати одиниці. Після виділення *суттєвих* і *несуттєвих* ознак доцільно ввести поняття одночлена. Надалі, у випадку помилки у відповіді учня, доцільно наводити контрприклад. Якщо учень, наприклад, вираз $a(b+c)$ назвав одночленом, вчителю достатньо поставити питання: «Якою є дія в дужках?». Учень сам побачить і зрозуміє помилку.

Запис одночлена в стандартному вигляді не викликає труднощів у учнів, якщо вчитель вчасно повторив з учнями всі властивості степенів.

Паралельно із зведенням одночлена до стандартного вигляду розглядається важливе поняття коефіцієнта. Поняття це на перший погляд просте, але практика свідчить, що учні досить часто неправильно визначають коефіцієнти у випадках, коли вони дорівнюють 1 або -1 , що призводить до грубих помилок при виконанні тотожних перетворень, розв'язуванні рівнянь тощо. Хоча перші відомості про коефіцієнт учні отримали у попередньому класі, проте саме тут, при зведенні одночленів до стандартного вигляду, є сприятливі можливості для попередження подібних помилок. При цьому мало обмежитися лише розглядом вправ, типу: назвіть коефіцієнти в одночленах: ab^2 , $-m^4n$. Корисно, щоб учні побачили ці коефіцієнти у процесі їх утворення. Ефективними у зв'язку з цим виявляються вправи такого змісту:

Визначте коефіцієнти у виразах:

$$0,25a^24d; 6\frac{3}{4}mn(-\frac{4}{27}27m^2); -5d^4 \cdot 0,2c \text{ тощо.}$$

Перетворюючи ці вирази, учні запишуть:

$$0,25a^24d = 1a^2d; 6\frac{3}{4}mn(-\frac{4}{27}27m^2) = -1m^3n; -5d^4 \cdot 0,2c = -1d^4c.$$

Після розгляду кількох аналогічних вправ доцільно нагадати учням про те, що утворені вирази можна записати в іншій формі, а саме: $1 \cdot a^2d = a^2d$; $-1 \cdot m^3n = -m^3n$.

Учні мають усвідомити, що дані та аналогічні рівності є тотожностями. Такий підхід сприяє осмисленому засвоєнню поняття коефіцієнта і дає змогу уникнути помилок. Безпомилкове засвоєння поняття відбувається не в процесі заучування, а в процесі самостійних пошуків учнями суттєвих ознак цього поняття. При цьому варто пропонувати більше вправ, на основі яких проводиться узагальнення.

Зведення одночлена до стандартного вигляду лежить в основі дії множення одночленів, а для її виконання можна з успіхом використати алгоритм названого

перетворення. Кращий ефект досягається тоді, коли вчитель не повідомляє учням готовий алгоритм перетворення, а на прикладі однієї-двох задач організовує їхню діяльність на самостійний чи колективний пошук алгоритму і його формулювання.

На розв'язування першої вправи вчитель завжди повинен звертати особливу увагу, яким би простим не був матеріал, бо із психології відомо, що перше враження найсильніше. Тому потрібно чітко продумувати, яку вправу варто розглянути першою, як провести пояснення, які терміни використати, як правильно подати зразок запису.

Наступні вправи повинні виконуватися під контролем учителя. Річ у тім, що в цей момент відбувається утворення нових нервових шляхів в корі головного мозку. Якщо учень неправильно розв'язує перші вправи нової теми, допускає помилки, і помилки залишаються не виправленими, то у нього прокладаються неправильні нервові шляхи. Учня прийдеться перевчати, а це складніше, ніж навчати. На етапі усвідомлення учнями нового поняття дуже важливо, щоб помилки не залишились непоміченими і не виправленими. Вчитель на цьому етапі повинен ретельно слідкувати та контролювати роботу учнів, частіше переглядати роботи учнів з нестійкими уміннями. Своєчасне контролювання і виправлення кожного помилкового кроку є передумовою безпомилкового засвоєння навчального матеріалу.

На етапі формування умінь важливо, щоб кожна помилка не тільки виправлялась, але й пояснювалась учителем, що зручно робити під час виконання коментованих вправ.

Дія множення одночленів і дія розкладання одночленів на множники є оберненими. Розкладання одночлена на множники – невизначена задача, оскільки має безліч розв'язків, наприклад: $12x^8 = 3 \cdot 4x^4x^4 = 2x^5 \cdot 6x^3$ і т.д.

Якщо навчити учнів розкладати одночлени на множники та здійснювати перевірку дією множення, то помилок під час множення одночленів буде значно менше.

Під час піднесення одночлена до степеня не потрібно поспішати із уведенням скороченого запису. Необхідно деякий час здійснювати детальні записи і тільки поступово переходити до скороченого запису, наприклад:

$$1\text{-й етап: } (2a^3b^4c^7)^3 = 2a^3b^4c^7 \cdot 2a^3b^4c^7 \cdot 2a^3b^4c^7;$$

$$2\text{-й етап: } (2a^3b^4c^7)^3 = 2^3 \cdot (a^3)^3 \cdot (b^4)^3 \cdot (c^7)^3 = 8 a^{3 \cdot 3} b^{4 \cdot 3} c^{7 \cdot 3} = 8 a^9 b^{12} c^{21};$$

$$3\text{-й етап: } (3a^2b^4c^3)^2 = 3^2 a^{2 \cdot 2} b^{4 \cdot 2} c^{3 \cdot 2} = 9a^4b^8c^6;$$

$$4\text{-й етап: } (4a^5b^3c^2)^2 = 16a^{10}b^6c^4.$$

Час від часу учні повинні перевіряти свою роботу, здійснюючи поопераційний контроль чи підставленням числових значень замість букв. Наприклад, щоб пересвідчитись у правильності піднесення добутку до степеня: $(2a^3)^3 = 6a^3$ учню достатньо замість a підставити 1.

В організації превентивної діяльності учнів з попередження помилок під час вивчення одночленів, доцільно разом з прийомом поступового ускладнення вправ використовувати прийом обернених перетворень. Причому, важливо пропонувати вправи, в яких використовуються обернені дії і відносно коефіцієнтів і відносно показників степенів, наприклад:

$$20xy^5 \cdot (?y^3) = -40xy^8, \quad (?p) \cdot (7p^?) = 42p^5.$$

Систему вправ варто доповнювати вправами, які будуть провокувати учнів на помилки.

Наприклад. Виконайте дії:

$$1) 5a^3 \cdot 3a^3; \quad 2) 4b^2a \cdot 7b^2; \quad 3) \frac{1}{3}x^2y^3 \cdot (-3)x^2y^3; \quad 4) 3a^2 + 5a^2;$$

$$5) 0,5b^7c \cdot 4,2b^7c; \quad 6) \frac{1}{2}k^3z^2 \cdot 2k^3z^2; \quad 7) 16k^2 - 4k^2 \quad (\text{в } 4 \text{ і в } 7 \text{ завданнях}$$

можлива помилка).

З метою попередження помилок у майбутньому варто звернути увагу учнів на різницю між показником степеня та коефіцієнтом одночлена. Для цього запропонувати для колективного розв'язання з подальшою перевіркою та обговоренням такі, наприклад, завдання:

Виконати та обґрунтувати дії:

а) $5a^3 + 3a^3$; б) $5a^3 \cdot 3a^3$; в) $4b^2a + 7ab^2$; г) $4b^2a \cdot 7ab^2$.

Психологи стверджують, що у процесі навчання осмислюється той матеріал, який є безпосередньою метою тієї чи іншої дії, що входить до складу навчальної діяльності. Для того, щоб матеріал був засвоєний учнями, необхідно, насамперед, щоб цей матеріал був ними осмислений, щоб на нього спрямовувалась увага. Послаблення уваги учнів призводить до появи помилок. Причиною послаблення уваги можуть бути: непосильні завдання; втрата впевненості; швидкий чи навпаки повільний темп уроку; одноманітність дій; втрата інтересу до діяльності; робота, що виконується є дуже простою.

Вчителю необхідно привертати увагу учнів і підтримувати її протягом всього уроку. Для цього необхідно розуміти, що діяльність, яка здійснюється на основі довільної уваги, потребує значних зусиль і швидше втомлює учня, ніж діяльність, яка ґрунтується на післядовільній увазі, саме *післядовільна увага є основною в навчальній діяльності на уроках математики*.

Як відомо, увага у процесі діяльності підсилюється, коли з'являється відносна новизна та спрацьовує чинник неочікуваності. Таким чинником є, наприклад, придумування учнями прикладів і контрприкладів та їх обговорення.

Необхідною умовою довгого зберігання післядовільної уваги є посиленість завдань та наявність відповідних знань, умінь та навичок. Достатньою умовою є значущість діяльності, наявність почуття відповідальності за її успішне виконання, інтерес до такої діяльності.

Засвоєння учнями властивостей степенів з натуральним показником, поняття одночлена та безпомилкове виконання дій над одночленами є міцним підґрунтям для вивчення многочленів та дій над ними.

Підсумовуючи вищесказане, приходимо до висновку: формуючи нові поняття з метою попередження появи помилок, вчителю доцільно враховувати такі рекомендації:

– *уводити нові поняття не формально;*

- *конкретизувати нові поняття ефектними прикладами;*
- *готувати учнів до сприйняття нових понять;*
- *не допускати в учнів думки про те, що нові поняття вводяться довільно;*
- *для кращого засвоєння нових понять вказувати їх зв'язок з попередніми поняттями;*
- *відводити належне місце наочності;*
- *виконувати з самого початку вправи, в яких неврахування необхідних для правильного розв'язання особливостей навчального матеріалу буде сприяти появі помилок;*
- *уникати розв'язування підряд великої кількості вправ одного типу.*

Многочлени. З метою успішного засвоєння теми «Многочлени» перед її вивченням доцільно провести урок, на якому учні повторять степені з натуральним показником і одночлени та дії над ними. Такий урок в системі уроків ми називаємо *підготовчим*. З урахуванням психологічних особливостей учнів підліткового віку він буде ефективним, якщо його провести у формі гри чи змагання. Перед проведенням підготовчого уроку варто в домашнє завдання включити низку питань на повторення.

З метою профілактики помилок, які виникають під час запису многочлена в стандартному вигляді, потрібно домагатися того, щоб учень кожного разу чітко осмислював всі суттєві особливості запропонованого йому завдання. З цією метою необхідно збільшити кількість вправ, у яких не вказуються дії, які потрібно виконати, а вимагається або спростити даний вираз, або виконати яке-небудь перетворення. Такі завдання будуть сприяти виникненню загальної навички починати виконувати дію тільки після осмислення особливостей запропонованого виразу.

Під час вивчення многочленів учні часто припускаються помилок при зведенні подібних доданків. Причину ми вбачаємо в тому, що:

- не сформовані на належному рівні вміння та навички у виконанні дій над раціональними числами (наприклад: $-6+11-4+12=32$; $24-11+6-5=24$);

– не до кінця усвідомлено, що під час дій над коефіцієнтами буквена частина залишається незмінною (наприклад: $4a - 8a + 11a = 7$; $3x^2 - x^2 = 3$).

Насамперед необхідно досягти успішного виконання всіма учнями дій над цілими числами: додатними і від’ємними. Для досягнення цієї мети потрібно виконати усно *значну* кількість завдань типу: Обчислити значення виразу:

а) $23 - 6 + 18 - 14 - 8$; б) $-21 + 4 + 15 - 12 - 9$; в) $4 + 23 - 14 - 9$; г) $10 - 14 - 5 - 7 + 3$ тощо.

При цьому асоціювати додатні числа з прибутком і додавати їх окремо, від’ємні – з боргом, і теж знаходити їх суму окремо (у кожного учня може бути своя асоціація). Останньою дією буде додавання двох чисел з різними знаками.

Тільки, актуалізувавши навички дій над додатними і від’ємними числами, можна переходити до вдосконалення умінь зводити подібні доданки, попередньо актуалізувавши розуміння поняття коефіцієнта. Учням варто запропонувати виконати серію завдань типу:

Спростити вираз: а) $7x^2 - 2x + 4x^2 + 5x$; б) $8ab + 7b - 4ab - 7b$ та ін.

При цьому весь час звертати увагу на визначення коефіцієнтів одночленів та акцентувати увагу на тому, що під час зведення подібних доданків дії виконуються тільки *над коефіцієнтами*, а буквена частина залишається незмінною. З метою кращого осмислення виконання таких дій, враховуючи психологічні особливості підлітків, їм можна запропонувати таку гру: збирати різні одночлени в окремі кошики, результати озвучувати. Доцільно також використовувати вправи на виконання обернених дій, тобто подання многочлена стандартного виду у вигляді довільного многочлена.

Вправа 1: Чи правильно, що:

а) $5x^2y^3 - 14x^3y^2 = -7x^2y^3 + 20x^3y^2 + 12x^2y^3 - 34x^3y^2$;

б) $18x - 15y = -3x + 4y + 15x - 11y$ тощо.

Вправа 2: Запишіть різними способами такі вирази:

а) $18x^3 + 6x^2$; б) $24x - 34$; в) $14ab^3 - 18a$ тощо.

Як відомо, окремі учні, знаючи правило розкриття дужок, розкривають їх з помилками.

Під час розкриття дужок ефективним прийомом є використання **правила-заборони**: *не можна розкривати дужки, не визначивши знак перед ними* (щось на зразок заборонних чи попереджувальних знаків у правилах вуличного руху ) . З цією метою бажано вимагати від учнів перед кожними дужками над знаком дії ставити значок . Коли учень буде писати відповідний знак, він мимоволі зверне увагу на знак перед дужками, і в пам'яті актуалізується правило, яке в даному випадку є доцільним. Наприклад:

Спростити вираз: а) $2a - 4b - (3a - 7b)$; б) $12x + 4y + (7y - 5x)$.

Однак, досить часто, пригадавши правило, учні, розкриваючи дужки перед якими стоїть знак «мінус», змінюють на протилежний тільки знак другого доданку, іноді тільки знак доданку, перед яким стоїть знак «+». З метою запобігання таких помилок доцільно разом з учнями скласти піктограму:

«мінус» змінює знаки всіх доданків у дужках
«плюс» не змінює знаків доданків у дужках

Вважаємо корисними такі вправи:

Вправа 1. Перевірте, чи правильно розкриті дужки, відповідь обґрунтуйте:

а) $12 + n^2 - (n + n^2 - 7) = 12 + n^2 - n + n^2 - 7$; б) $7 - (9a - 4b - 12) = 7 - 9a + 4b - 12$;

Вправа 2. Заключіть подані нижче вирази в дужки, перед якими поставте:

1) знак « - » ; 2) знак « + »: а) $8a^3 - 2a^2 + 7$; б) $-4a^2 + 7a^3 - 12$;

Вправа 3. Який многочлен потрібно записати замість пропусків, щоб одержати тотожність: 1) $-(...) = 6a - 7n + 3$; 2) $12n^2 - (...) = 5n^2 + 7n^3m - 4$.

Під час множення многочлена на одночлен типовою є помилка, коли розкриваючи дужки, учні виконують множення на одночлен тільки найближчого до нього члена многочлена. З метою попередження таких помилок ми рекомендуємо використовувати прийоми холістичного навчання, поділяючи думку А. Сиротюка [221] про те, що способи навчання математики повинні ґрунтуватися на гармонійному поєднанні роботи обох півкуль головного мозку – лівої та правої. Як відомо, якщо потрібно щось нове запам'ятати, потрібно його асоціювати з яким-небудь фактом, що зберігається в пам'яті.

У власному дослідженні ми використовували прийом «Синектика». Синектика – це використання в міркуваннях метафор, аналогій з метою незнайоме зробити знайомим. Під час використання такого прийому в учнів розвивається вміння створювати свої метафори та аналогії. Кращому запам'ятовуванню правила розкриття дужок будуть сприяти, наприклад, такі аналогії:

1. Розкриття дужок під час множення числа на суму, аналогічно тому, як офіціант обслуговує кожну особу, яка сидить за столом.

2. Дужки можна уявити будинком, одночлена за дужками – товариша, який прийшов провідати своїх друзів. Зайшовши в будинок, він привітається з кожним. Скільки буде друзів у будинку, стільки буде вітань, а, отже, і стільки ж доданків після розкриття дужок. Так учень може контролювати свої дії, що є надзвичайно важливим етапом в попередженні помилок.

Аналіз проведених нами контрольних робіт з теми «Многочлени» показав, що учні під час множення многочленів допускають *помилки при розкритті дужок, у зведенні подібних доданків після розкриття дужок, плутають властивості степенів*.

З метою безпомилкового множення многочленів перед введенням правила множення многочленів пропонуємо актуалізувати та закріпити вміння та навички зведення подібних доданків та дії зі степенями.

Важливо в умовах організації превентивної діяльності доброзичливо вказувати на недоліки і помилки учня. Створення в класі атмосфери співпраці, загальної доброзичливості сприяє прилученню учнів до успішної діяльності.

Успіх учнів залежить, зокрема, і від правильно організованого повторення. Багаторазові повторення з використанням трьох видів пам'яті – зорової, слухової і моторної – призводить до того, що кожен учень стає учасником процесу навчання і довільно чи мимовільно набуває певного рівня знань та умінь. Пояснюючи новий матеріал, учитель має не тільки зробити усне повідомлення, а й максимально прояснити зміст навчального матеріалу за допомогою наочних засобів, щоб в учнів на цій стадії вивчення склалися міцні зорові асоціації. Ми поділяємо думку Н. О. Менчинської [160] про те, що своєчасному попередженню появи помилок

сприяє вчасно і якісно проведена профілактична робота. Для цього вчителю необхідно: забезпечити повноцінне засвоєння матеріалу, що вивчається; використовувати спеціальну систему вправ на попередження помилок.

Так, наприклад, щоб забезпечити безпомилкове засвоєння формул скороченого множення, зокрема формули квадрата двочлена, необхідно сформулювати в учнів уміння визначати доданки, їх квадрати, добуток та подвоєний добуток. З цією метою необхідно ще за декілька уроків перед вивченням нового матеріалу, використовуючи усні вправи, готувати учнів до його сприйняття.

Серед різних сум учні мають навчитись визначати перший і другий доданки. На наступних уроках закріплюються уміння знаходити доданки та їх квадрати. Формуються уміння знаходити добуток першого і другого доданків. Далі вводиться поняття подвоєного добутку доданків. Закріплення вироблених навичок продовжується ще протягом одного-двох уроків. У результаті, після виведення формули $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$ учні не роблять помилок в знаках, правильно знаходять подвоєний добуток.

Кращому запам'ятовуванню для «візуалів» сприятиме піктограма:

$$(\Delta \pm \square)^2 = \Delta^2 \pm 2\Delta \cdot \square + \square^2.$$

Для належного засвоєння формул на уроках алгебри у 7 класі доцільно використати так званий «компактний метод»:

1 крок. Учні виконують завдання «Розбити правило рисочками на окремі вказівки»: Квадрат двочлена // дорівнює квадрату першого виразу // плюс подвоєний добуток першого на другий // плюс квадрат другого виразу».

2 крок. Вчитель показує зразок виконання вправи за підготовленим правилом.

3 крок. Відповідно до зразка, підготовленого вчителем, учень біля дошки читає правило в підручнику та, зупиняючись після кожної рисочки, виконує відповідну частину вправи.

Інші учні слідкують за роботою біля дошки, нашіптуючи правило. До кінця уроку майже всі учні запам'ятовують правило, а головне – вміють його

використовувати. Цей метод тісно корелює з теорією поетапного формування розумових дій П. Я. Гальперіна.

Для відпрацювання учнями формул скороченого множення варто пропонувати їм такі завдання:

Вправа 1. Чи правильно, що:

а) $(a-b)^2 = a-2ab+b$; б) $(a-b)^2 = 2a-ab+b^2$; в) $(a-b)^2 = a^2-2ab+b^2$;

г) $(a-b)^2 = a^2-2ab-b^2$; д) $(a-b)^2 = a^2+ab+2b$; е) $(a-b)^2 = a^2+ab+b^2$.

Вправа 2. Перевірте, чи правильно розкриті дужки:

а) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$; в) $(m-n)^2 = m^2 - 2mn - n^2$;

б) $(x-y)^2 = x^2 + y^2 - 2ab$; г) $(d-c)^2 = 2dc - d^2 - c^2$.

Виконання завдань вправи 2 можна провести у вигляді змагання між двома командами.

Належне місце в закріпленні формул скороченого множення повинні займати усні тренувальні вправи та самостійні роботи. Це можуть бути самостійні роботи на пряме використання формул скороченого множення та варіаційні самостійні роботи, які містять деформовані завдання. Наприклад: заповнити пропуски:

а) $(?-9c^2)^2 = 25a^2 - ? + ?$; в) $(5x + ?)^2 = ? + 70xy + ?$;

б) $? + 30xy + 9y^2 = (? + 3y)^2$; г) $(9a - ?) = ? - ? + 100b^2$.

Такі завдання покликані розвивати навички самоконтролю.

Певні труднощі відчувають учні під час застосування відповідних формул до перетворення виразів $(-n+4)^2$, $(-z-2)^2$ та подібних їм. З метою попередження появи помилок необхідно попередньо здійснити підготовчу роботу – розглянути вирази (усно чи письмово), що знаходяться в дужках, у вигляді суми чи різниці. Корисно розглянути різні варіанти таких вправ з наступним визначенням найраціональнішого способу:

$$(-n+4)^2 = ((-n)+4)^2 = (-n)^2 + 2(-n) \cdot 4 + 4^2 = n^2 - 8n + 16;$$

$$(-n+4)^2 = (4-n)^2 = 16 - 8n + n^2;$$

$$(-z-2)^2 = ((-z)-2)^2 = (-z)^2 - 2(-z) \cdot 2 + z^2 = z^2 + 4z + 4;$$

$$(-z-2)^2 = (-1)^2(z+2)^2 = z^2 + 4z + 4.$$

Важливо, щоб учні усвідомили тотожності: $(-a-b)^2 = (a+b)^2$, $(a-b)^2 = (b-a)^2$ та правильно використовували їх під час розв'язування вправ.

Поширеною помилкою при перетворенні квадрата двочлена у многочлен є записи: $(a+b)^2 = a^2 + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - b^2$.(*)

Щоб переконати учнів у помилковості виконаних перетворень, корисно використовувати числові підстановки. Запропонувати перевірити кожну з рівностей, підставивши у ліву та праву частини виразів однакові числові значення, наприклад, $a = 2$, $b = 1$ порівняти відповіді та зробити висновок. При цьому важливо звернути увагу учнів на те, що збіг значень двох виразів при деякому наборі значень змінних може бути випадковим і тому не дає підстав стверджувати, що перетворення виконано правильно. Так, вирази $(a+b)^2$ і $a^2 + b^2$ набувають однакових значень, наприклад, якщо $a=0$ і $b=3$, але вони не є тотожно рівними. Для кращого запам'ятовування варто запропонувати на полях зошита зобразити різними кольорами піктограму:

$(a \pm b)^2 \neq a^2 \pm b^2$

Запобіганню помилок (*) сприяє сформоване вміння учнів визначати дії згідно назви виразу і навпаки. Часто формули школярі вивчають, а в назвах часто плутаються, що призводить до неправильного використання формул.

Щоб правильно прочитати вираз, потрібно спочатку назвати порядок дій виразу, а потім прочитати вираз, починаючи з останньої дії.

Кращому осмисленню сприяє таблиця для запам'ятовування і, звичайно, система усних вправ на визначення дії згідно назви виразу.

Таблиця 2.1

Визначення дії згідно назви виразу

Дії	Назва виразу
1. Різниця виразів 2. Піднесення різниці до квадрату.	Квадрат різниці: $(a - b)^2$
1. Піднесення до квадрату кожного виразу. 2. Різниця квадратів виразів.	Різниця квадратів: $a^2 - b^2$

Усвідомленню та закріпленню сприяє завдання: Заповніть пропуски в таблиці:

Таблиця 2.2

Визначення назви виразу за дією та дії за назвою виразу

Назва виразу	Дії
?	1. Сума двох виразів. 2. Піднесення суми до квадрату.
Сума квадратів: $a^2 + b^2$	?

Скласти таку таблицю для куба двочлена та різниці або суми кубів учні зможуть самостійно. З метою самостійного узагальнення можна запропонувати учням знайти загальне правило піднесення до квадрату тричлена: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$.

Під час піднесення многочлена до степеня варто звернути увагу учнів на те, що число доданків результату завжди більше числа доданків початкового многочлена. Зокрема, під час піднесення двочлена до степеня кількість доданків результату після зведення подібних завжди *більше показника степеня на одиницю*. Важливо, щоб учні вміли попередньо визначати кількість доданків результату піднесення до степеня до зведення і після зведення подібних членів. Такий попередній підрахунок з одного боку, викликає зацікавлення, а з іншого — попереджує помилки.

Учні з допомогою вчителя можуть створити наступну таблицю та занести її в особистий довідник.

Таблиця 2.3

Визначення кількості доданків результату піднесення до степеня до зведення і після зведення подібних членів.

Піднесення двочлена до степеня	Кількість членів многочлена	
	до зведення подібних	після зведення подібних доданків
$(a + b)^2$	$2^2 = 4$	$2+1=3$
$(a - b)^2$	$2^2 = 4$	$2+1=3$
$(a + b)^3$	$2^3 = 8$	$3+1=4$
$(a - b)^3$	$2^3 = 8$	$3+1=4$

З усіх видів застосувань формул скороченого множення особливої уваги заслуговують вправи на обернене перетворення. Важливість значення таких вправ полягає в тому, що прийоми, які при цьому відпрацьовуються, знаходять широке використання під час вивчення квадратних рівнянь та нерівностей, квадратичної функції.

Ми дотримуємося думки, що одночасне вивчення прямих і обернених перетворень полегшує засвоєння цих дій. Тому в своєму дослідженні надавали перевагу *прийому протиставлення*. Учні підносили двочлен до квадрата, використовуючи формули та розкладали тричлени на множники в умовах одного уроку.

Представлення тричлена $a^2 \pm 2ab + b^2$ у вигляді квадрата двочлена є для учнів роботою творчою, яка потребує уваги, зосередженості та збудження мисленнєвих процесів. Разом з тим, вона є цікавою своєю результативністю. Перший приклад «згортання» тричлена має показати вчитель. Потім запропонувати учням на іншому прикладі виконати таку ж дію. Звичайно, не у всіх відповідь відразу буде правильною. Вчасна похвала та заохочення сприятиме

бажанню учнів навчитись виконувати подібні вправи. Наступним етапом може бути складання алгоритму учнями під контролем вчителя.

Завдання: Розкласти тричлен $4x^2 + 12x + 9$ на множники.

1. Знайдемо члени тричлена, подані у вигляді квадратів одночленів:
 $4x^2 = (2x)^2$, $9 = 3^2$.

2. Утворюємо подвоєний добуток знайдених одночленів і порівнюємо його з третім членом даного тричлена: $12x = 2 \cdot 2x \cdot 3$.

3. Розкладаємо тричлен на множники:
 $4x^2 + 12x + 9 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2 = (2x + 3)^2$.

Використовуючи принцип наочності, складений алгоритм подається у вигляді презентації, супроводжується виконанням прикладу та занотовується в зошит.

Важливе значення має рекомендація вчителя: «Читаючи та використовуючи алгоритм, старайтесь його запам'ятовувати». Така рекомендація, а також відповідні вимоги і заохочення вчителя сприяють кращому запам'ятовуванню та полегшують його. Одночасно вчителю потрібно наголосити, що дуже важливо перевіряти свої дії. Для цього можна підставити довільні числові значення у праву та ліву частини рівності. Уміння використовувати алгоритми розвиває усне та писемне мовлення учнів. Вони згодом здатні самостійно створювати нові алгоритми.

Варто також показати школярам, що під час розкладання тричлена на множники відповідь у кожному випадку не є однозначною.

Наприклад. $x^2 - 28xy + 49y^2 = (x - 7y)^2$; $x^2 - 28xy + 49y^2 = (-x + 7y)^2$. На практиці, як правило, записують один із варіантів.

У роботі з попередження помилок важливе місце займають завдання, які збуджують думку, сприяють розвитку мислення учнів. Такими, наприклад, є завдання, які не лише закріплюють формули, а й створюють необхідне підґрунтя для успішного вивчення квадратних рівнянь.

Вправа 1. Які додаткові дії потрібно виконати, щоб із тричленів:

а) $x^2 - 4xy + y^2$; б) $5x^2 + 6xy + 9y^2$; в) $8ab - a^2 - 4ab$ можна було виділити квадрат двочлена? (відповідь, наприклад, в завданні а) може бути не однозначною: $x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 4xy + y^2 + 3x^2 - 3x^2 = (2x - y)^2$, або

$x^2 - 4xy + y^2 = x^2 - 4xy + y^2 + 3y^2 - 3y^2 = (x - 2y)^2$ і вчитель має звернути на це увагу учнів)

Вправа 2. При якому значенні n вираз $16x^2 + n + 25y^2$ можна подати у вигляді квадрата двочлена?

Важливе значення під час виконання завдань на виділення квадрату двочлена має формування в учнів прийомів: додавання та віднімання однакових виразів, сума яких дорівнює нулю; представлення виразу у вигляді суми кількох виразів.

Вправа 1. Виділити квадрат двочлена: $4a^2 + 12a + 8$.

Розв'язання. Додамо і віднімемо одиницю, маємо:

$$4a^2 + 12a + 8 + 1 - 1 = 4a^2 + 12a + 9 - 1 = (2a + 3)^2 - 1.$$

Вправа 2. Виділити квадрат двочлена: $9y^2 - 32y + 25$.

Розв'язання. Представимо $-32y$ так: $-32y = -30y - 2y$, тоді маємо:

$$9y^2 - 32y + 25 = 9y^2 - 30y + 25 - 2y = (3y - 5)^2 - 2y.$$

Важливим моментом на першому етапі формування навичок є варіювання завдань, які дають можливість уникнути випадкових асоціацій. Так, вивчаючи формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, важливо використовувати такі завдання на перетворення тричлена в квадрат двочлена, в яких доданки в тричлені розміщені в різному порядку, наприклад:

$$6a + a^2 + 9 = a^2 + 6a + 9 = 9 + 6a + a^2 = (a + 3)^2 = (3 + a)^2.$$

Часто учням важко виконувати математичні дії з числами тому, що вони не вміють використовувати навчальний матеріал з алгебри під час числових обчислень. Щоб подолати таку прогалину в знаннях радимо в ході вивчення формул скороченого множення пропонувати учням завдання на обчислення, в яких використання формул скороченого множення сприяє раціональному

виконанню вправ. Зокрема знаходження різниці квадратів за формулою значно спрощує обчислення під час вивчення теореми Піфагора.

Перед уведенням розкладання многочлена на множники винесенням спільного множника за дужки необхідно провести підготовчий урок, на якому повторити поняття спільного множника, найбільшого спільного дільника, правила множення і ділення степенів з однаковими основами; піднесення степеня до степеня; піднесення одночлена до степеня; множення многочлена на одночлен та многочлен; формули скороченого множення.

Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки є дією, оберненою до множення многочлена на одночлен. Тому одна з цих дій перевіряється через іншу, що сприяє розвитку навичок самоконтролю в учнів.

Для успішного засвоєння теми «Розкладання многочлена на множники способом винесення спільного множника за дужки» пропонуємо вивчати її відразу ж після множення многочлена на одночлен.

Зменшити кількість помилок під час винесення спільного множника за дужки допоможуть деформовані вправи, які варто пропонувати учням під час вивчення множення многочлена на одночлен.

Вправа. Заповніть пропуски так, щоб утворилась тотожність:

а) $3x^4 \cdot (? + ?) = x^5 + 6x^8$; б) $? \cdot (2a - 3ab + 4a^2) = 10a^2 - 6a^3b + 8a^4$;

г) $6x^3y^2 - 4x^2y - 10xy = ? \cdot (? - ? - ?)$; д) $(2m^3 - 9m) \cdot ? = 10m^6 - ?$ та ін.

З метою попередження помилок, які допускають учні під час скорочення алгебраїчних дробів, рекомендуємо особливу увагу звертати на дію «розкласти на множники» та акцентуємо увагу на тому, що розкласти на множники означає подати у вигляді добутку.

На підготовчому етапі доцільно виконувати вправи на представлення одночлена у вигляді добутку. Систему вправ пропонуємо доповнити такими, які можуть провокувати учнів на помилку.

Вправа 1. Подайте у вигляді добутку (*розкладіть на множники*), якщо це можливо такі вирази:

а) $12x^2y^5$; б) $34x^3y^3$; в) $8a^2c^9$; г) $a^2 + b^4$; д) ab^3c^7 . Відповідь перевірте.

Кращому засвоєнню сприяє таке уведення дії розкладання на множники многочлена: 1) запропонувати знайти добуток одночлена на многочлен: $2a(3a^2 - 2a + 1) = 6a^3 - 4a^2 + 2a$; 2) поміняти місцями ліву і праву частину тотожності: $6a^3 - 4a^2 + 2a = 2a(3a^2 - 2a + 1)$. Останній вираз прочитати так: многочлен $6a^3 - 4a^2 + 2a$ розкладено на два множники: одночлен $2a$ і многочлен $(3a^2 - 2a + 1)$.

Далі необхідно розглянути методику розв'язування вправ.

Вправа 2. Розкласти многочлен $4a^5 - 6a^2$ на множники.

Розв'язання. Кожен одночлен можна розкласти на два множники, один з яких $2a^2$: 1) $4a^5 = 2a^2 \cdot 2a^3$; 2) $6a^2 = 2a^2 \cdot 3$; 3) $4a^5 - 6a^2 = 2a^2 \cdot 2a^3 - 2a^2 \cdot 3$. Винесемо спільний множник за дужки: $4a^5 - 6a^2 = 2a^2(2a^3 - 3)$.

Учні повинні чітко розуміти, що якщо добуток справа є многочленом зліва (перевірка), то дія виконана правильно.

До відома учнів потрібно довести, що многочлен вважається розкладеним на множники, якщо жодного із співмножників, утворених в результаті перетворення, не можна далі розкласти.

Поширеною помилкою є втрата одиниці під час винесення спільного множника за дужки, який дорівнює одному з членів даного многочлена, або відрізняється від нього тільки знаком.

Розглянемо таку помилку: $4x^2 + 6x^3y - 2x^2 = 2x^2(2 + 3xy)$. Причиною її появи є те, що учні плутають дію ділення з дією віднімання. Завдання вчителя: зруйнувати стереотип, кожного разу вимагаючи пояснення, що означає винести спільний множник за дужки.

Щоб учні не втрачали одиницю при винесенні спільного множника за дужки, який дорівнює одному з одночленів, необхідно навчити їх перевіряти свої дії дією множення та звернути увагу на те, що після винесення спільного множника за дужки, кількість одночленів многочлена повинна залишитись незмінною.

Також потрібно поетапно обґрунтувати розкладання многочленів на множники способом винесення спільного множника за дужки:

1 етап: встановлення спільного множника;

2 етап: розкладання кожного члена многочлена на два співмножники, один з яких спільний;

3 етап: винесення спільного множника за дужки.

Приклад. $15x^3 - 6x^2 - 3x = 5x^2 \cdot 3x - 2x \cdot 3x - 3x \cdot 1 = 3x(5x^2 - 2x - 1)$.

Важливе значення в попередженні помилок під час вивчення теми «Винесення спільного множника за дужки» має розв'язування спеціальної системи вправ:

– вправи на визначення рівня підготовки учнів до сприйняття нового матеріалу;

– вправи для безпосереднього сприйняття нового матеріалу та первинного закріплення одержаних знань;

– вправи на осмислення алгоритму розв'язування даного виду вправ та формування початкових умінь;

– диференційовані вправи, спрямовані на розвиток умінь учнів через закріплення знань;

– вправи, спрямовані на формування навичок учнів розкладання многочлена на множники шляхом винесення спільного множника за дужки.

Приклади таких вправ ми пропонуємо в Додатку В.

Формула різниці квадратів виводиться шляхом множення двох многочленів:

$$(a - b)(a + b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Одразу після виведення варто звернути увагу на ліву та праву частини тотожності, виділити суттєве: розглядаємо добуток двочленів, одночлени яких рівні, а дії між ними в дужках протилежні. Запам'ятовуємо: $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ (для кращого запам'ятовування на початку вивчення теми в перших дужках записуємо різницю двох виразів).

Опорний конспект:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$	$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$
<i>Добуток різниці двох виразів на їх суму дорівнює різниці квадратів цих виразів</i>	<i>Різниця квадратів двох виразів дорівнює добутку різниці цих виразів на їх суму</i>

Під час розкладання многочленів на множники з використанням тотожності $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ складність для учнів становить подання даного двочлена у вигляді різниці квадратів. Зазначених труднощів можна уникнути, якщо дотримуватись виконання певної послідовності вправ (див. Додаток Д). Корисно також використовувати деформовані вправи та вправи, складені самими учнями. Це, наприклад, такі:

1. Заповнити порожні квадрати: $x^4 - 9 = (\square - \square)(\square + \square)$;
 $(3k^2 - 2p)(3k^2 + 2p) = \square - \square$; $(\square + 4)(\square - 4) = 25a^6 - \square$; $\square - 36x^4 = (7 - \square)(7 + \square)$.
2. Записати різницю квадратів двох виразів та розкласти її на множники.
3. Записати два різних одночлени, знайти добуток різниці і суми цих одночленів двома способами: детальним перемноженням та скорочено.
4. Чи можна використати формулу різниці квадратів до добутку:
 $(3x^2 - 2y)(2y^2 + 3x)$? Відповідь обґрунтуйте.

Важливою умовою успішного засвоєння навчального матеріалу є своєчасне виправлення учнями допущених ними помилок. Вчитель має навчити учнів виявляти свої помилки, здійснюючи перевірку. Кожен учень перед тим, як здати самостійну чи контрольну роботу, повинен вміти сам її перевірити. Перевірку здійснювати не шляхом виконання однієї і тієї ж дії декілька раз, тому що людина так влаштована, що власних помилок може не побачити, а шляхом виконання обернених дій, підставлянням числових значень чи використовуючи контрприклад. Здійснення перевірки надає учням більшої впевненості в правильності виконання поставленого перед ними завдання. Розходження результату перевірки з одержаною під час розв'язання відповіддю нашоїх учнів на необхідність уважніше ставитися до виконання вправи, ретельно

аналізувати кожен крок, змушує не тільки згадувати правила виконання завдання, але й скористатися довідковими джерелами. Формуючи навички розкладання многочленів на множники, варто використовувати «провокаційні» вправи, в яких створюється ситуація, що нагадує сферу застосування нового алгоритму, але не відповідає всім потрібним вимогам.

У дослідженні ми приділяли значну увагу організації систематичного повторення навчального матеріалу через узагальнення знань. Як відомо, відсутність повторення може призвести до забування. Систематизація та узагальнення знань сприяють не тільки відновленню цих знань, але й створенню міцніших логічних зв'язків між новим та попереднім навчальним матеріалом, встановленню схожості та відмінності. Потрібно пам'ятати, що чим міцніші та глибші логічні зв'язки, тим вільніше учні орієнтуються в їх використанні.

Під час повторення навчального матеріалу необхідно увагу учнів сконцентровувати на основному, найсуттєвішому і важливому матеріалі, викликати у них бажання найкраще запам'ятати цей основний матеріал: необхідно зробити процес повторення та закріплення знань процесом активним, творчим та цікавим. Розкриваючи внутрішній зміст матеріалу, що повторюється, необхідно домагатися від учнів повного усвідомлення суті, пояснення різних дій в перетвореннях. Важливими засобами повторення ми вважаємо створені самими учнями за допомогою вчителя піктограми, опорні таблиці, опорні конспекти та карти знань. Приклади таких засобів ми пропонуємо в Додатках Е, Ж.

Під час розв'язування тільки запропонованих вчителем вправ учні не завжди осмислюють суттєво важливі властивості понять. Однак ці властивості краще усвідомлюються під час складання вправ самими учнями.

З метою глибокого розуміння учнями процесу одержання виразу, що розкладається на множники способом групування та формування уміння перевірити свої дії, варто взяти два нескладних многочлени й знайти їх добуток, наприклад: $(a - 2)(x^2 + 2x - 3) = ax^2 - 2x^2 + 2ax - 4x - 3a + 6$, а потім виконати обернені операції з розкладання одержаного виразу на множники.

Щоб учні могли швидко і безпомилково розкласти многочлени на множники необхідно привчити їх перебирати всі способи в такій послідовності:

- перевіряємо, чи не можна винести спільний множник за дужки;
- спробуємо до многочлена застосувати формули скороченого множення;
- використаємо спосіб групування.

Обов'язково занотувати в довідничок, створений ще на початку вивчення алгебри, та користуватися цією нотаткою протягом вивчення теми «Многочлени». Від рівня сформованості теоретичних знань учнів з теми залежить якість їхніх практичних умінь та, відповідно, здатність вироблення навичок. Якщо певні теоретичні відомості, що перетворились на знання, будуть неповними, недостатньо осмисленими, неточними, поверховими, або просто відсутніми, то сформовані вміння і навички також виявляться неконструктивними і непридатними для подальшого ними оперування.

Успішне вивчення многочленів: запис їх в стандартному вигляді, виконання дій над многочленами, розкладання многочленів на множники є важливим підґрунтям для успішного виконання дій над раціональними виразами, безпомилкового скорочення дробів, розв'язування рівнянь.

2.1.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Раціональні вирази»

Раціональні вирази за чинною програмою з математики вивчаються у 8 класі. Розглянемо типові помилки учнів при вивченні даного розділу:

– під час ділення одночленів діляться тільки коефіцієнти, наприклад: $(12x^2y^3):(6x^2y^3)=2x^2y^3$. Ця помилка пояснюється звичкою виконувати дії над коефіцієнтами під час зведення подібних доданків.

– показники діленого діляться на показники дільника, наприклад: $18x^8y^6:6x^2y^3=3x^4y^2$, що свідчить про формальне засвоєння правила ділення степенів з однаковими основами.

З метою запобігання таких помилок, перш ніж ввести правило ділення одночленів, необхідно детально розписати декілька прикладів різного рівня

складності, наприклад: $(4a^5):(2a^3) = \frac{4aaaaa}{2aaa} = 2a^2$; $(b^3a^2):(ba) = \frac{bbbaaa}{ba} = ba$.

Важливо виробити звичку учнів час від часу перевіряти свої дії ділення дією множення та через підстановку числових значень букв у початковий і кінцевий вирази (якщо знайдені числові значення виразів будуть однакові, то вправу розв'язано правильно).

Значну кількість помилок учні допускають під час виконання дій над раціональними дробами, зокрема, під час скорочення таких дробів.

Наприклад, пишуть:

$$\text{а) } \frac{3a+b}{3c} = \frac{a+b}{c}; \text{ б) } \frac{a+b}{ac} = \frac{b}{c}; \text{ в) } \frac{a+b}{a} = b;$$

$$\text{г) } \frac{5a^2b - a^2c - 2b}{a} = 5ab - a^2c - 2;$$

$$\text{д) } \frac{2(7a+3b) - (7a-3b)}{7a-3b} = 2(7a+3b); \text{ е) } \frac{18m^2 + 12mn}{9m^2 + 12mn + 4n^2} = \frac{18m^2}{9m^2 + 4n^2}.$$

Причини появи таких помилок нами детально розглянуті в першому розділі.

З метою попередження помилок:

$$\text{а) } \frac{a^2 - b^2}{a - b} = a - b; \text{ б) } \frac{a^3 - b^3}{a - b} = a^2 - b^2 \text{ бажано уповільнити процес звертання}$$

міркувань. Учні мають виконувати розгорнуте розв'язування вправ та здійснювати пояснення виконаних дій, використовуючи основну властивість дробу.

Попередженню помилки виду: $\frac{2a+5b}{2a} = 5b$ сприяє сформована звичка обчислення значень початкового і кінцевого виразу. Наприклад, якщо підставити значення $a = 2, b = 1$ помилка стає очевидною: $\frac{2 \cdot 2 + 5 \cdot 1}{2 \cdot 2} \neq 5 \cdot 1$.

Вчителю варто звернути особливу увагу і на такі помилки:

$$\text{а) } \frac{a-x}{a-x} = 0; \text{ б) } \frac{ab^2c}{ab^2c} = 0. \text{ З метою їх запобігання необхідно домогтися, щоб}$$

учні усвідомили, що під час скорочення дробів результат взагалі не може

дорівнювати нулю. Частка дорівнює нулю тільки у випадку, коли ділене після зведення подібних доданків дорівнює нулю, наприклад: $\frac{2a - a - a}{b} = 0$.

Часто учні у відповіді після скорочення дробу втрачають одиницю в чисельнику, пишуть: $\frac{ab}{ab^2} = b$, замість $\frac{1}{b}$; $\frac{2}{12(a-2b)} = 6(a-2b)$, замість $\frac{1}{6(a-2b)}$.

Причини появи цих помилок аналогічні попереднім, крім того учень вважає, що якщо в чисельнику скоротилось все, значить, там нічого не залишилось. Ця помилка дуже часто зустрічається під час множення і ділення дробів, знаходження невідомого члена пропорції, розв'язування рівнянь. З метою запобігання таких помилок, учителю необхідно зосередити увагу учнів на розв'язуванні рівнянь, корені яких мають вигляд: $\frac{1}{n}$.

Типовою є також помилка: $\frac{x-1}{1-x} = \frac{x-1}{x-1} = 1$, що пов'язана з необхідністю зміни знаку в чисельнику чи знаменнику дробу для можливості його скорочення. Як правило, учні змінюють знак у знаменнику, але забувають змінити знак перед дробом, що є наслідком несформованих умінь під час віднімання одночленів і многочленів і при внесенні в дужки.

Необхідно також виокремити таку помилку:

$\frac{a^2 - b^2}{(b-a)^2} = \frac{(a+b)(a-b)}{-(a-b)^2} = -\frac{(a+b)}{a-b}$, причина якої в тому, що учні не засвоїли, що $(a-b)^2 = (b-a)^2$.

Внаслідок нерозуміння властивості: $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, учні допускають такі

помилки: $\frac{2ab}{a+b} = \frac{2b}{1+b} = \frac{2}{1+1} = 1$.

Заслуговують на увагу помилки учнів під час віднімання дробів. Типовою є помилка, що з'являється внаслідок віднімання раціональних дробів, де

чисельником від'ємника є многочлен. Помилково «мінус» перед дробом школярі відносять не до всього чисельника, а тільки до першого його члена, наприклад:

$$\frac{2x+4y}{3} - \frac{3x-2y}{5} = \frac{10x+20y-9x-6y}{15} = \frac{x-14y}{15}.$$

Щоб запобігти таких помилок, не потрібно поспішати із звертанням міркувань. Під час виконання перших вправ варто пропонувати учням розгорнуто виконувати дії: 1) записувати чисельник від'ємника в дужках; 2) розкривати дужки за правилом; 3) зводити подібні доданки. Доцільним є використання алгоритмічного припису в поєднанні з виконанням завдання.

Вправа. Виконати дію: $\frac{2x+4y}{3} - \frac{3x-2y}{5}.$

Алгоритмічний припис:

1. Звести дробови до спільного знаменника (оскільки 3 і 5 взаємно прості числа, то найменше спільне кратне дорівнює їх добутку): $\frac{10x+4y}{15} - \frac{9x-2y}{15}.$

2. Записати різницю дробів у вигляді дроби, записавши чисельник другого дроби в дужках:

$$\frac{10x+4y}{15} - \frac{9x-2y}{15} = \frac{10x+4y-(9x-2y)}{15}.$$

3. Виконати дії, розкривши дужки, перед якими стоїть знак «мінус», та звести подібні доданки у чисельнику:

$$\frac{10x+4y-9x+2y}{15} = \frac{x+6y}{15}.$$

Трапляються випадки, коли перетворення пропорцій та рівнянь через звільнення від знаменника переноситься учнями на дії з раціональними дробами:

$$\frac{3x^2-2x}{x+1} - \frac{5x-9}{x+1} = 3x^2-2x-5x-9.$$

Однією з причин появи таких помилок є низький рівень усвідомлення області визначення виразу.

Помилки виду: $\frac{a^8 b^6}{b^3 a^2} = a^4 b^2$ учні допускають внаслідок нерозуміння, що

скорочення дробів здійснюється діленням чисельника і знаменника на степінь з однаковою основою, а при діленні від показника діленого необхідно віднімати показник тієї ж основи дільника. Для попередження такого типу помилок, необхідно спочатку розгорнуто виконувати письмове ділення чисельника і знаменника на спільний множник, і тільки після належного засвоєння переходити до усного скорочення. Вміння правильно виконувати письмово і усно ділення $a^{3m-1} : a^{m-1} = a^{3m-1-(m-1)} = a^{3m-1-m+1} = a^{2m}$ є підґрунтям для правильного розв'язування деяких типів показникових рівнянь.

Типовими помилками під час додавання та віднімання алгебраїчних дробів є:

– додавання окремо чисельників і знаменників, наприклад:

$$\frac{a+b}{a} + \frac{c-d}{b} = \frac{a+b+c-d}{a+b}; \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{a+b+c};$$

– додавання чисельників без множення їх на додаткові множники,

наприклад: $\frac{2a}{m} + \frac{b-c}{n} = \frac{2a+b-c}{mn}; \quad \frac{4a}{b} - \frac{3b}{c} = \frac{4a-3b}{bc};$

– додатковий множник домножується тільки на один член многочлена в

чисельнику, наприклад: $\frac{2a+b}{c} + \frac{b-3a}{b} = \frac{2a+b^2}{cb} + \frac{b-3ac}{cb};$

– ціле число без зведення до спільного знаменника додається до чисельника

дробу, наприклад: $6 + \frac{a}{b} = \frac{6+a}{b}.$

Причиною таких помилок є помилкові асоціації, що сформувалися під час виконання аналогічних дій зі звичайними дробами.

Характерними для дій множення і ділення алгебраїчних дробів є такі помилки учнів:

– Знаменник дробу множать на ціле число, наприклад: $\frac{2m}{n} \cdot a = \frac{2m}{na}.$

Причиною помилки є несформовані навички перевірки правильності виконання завдання ще під час вивчення множення звичайних дробів.

– Чисельник і знаменник дробу множать на ціле число, наприклад:

$$\frac{5k}{7n} \cdot n = \frac{5kn}{7n^2}.$$

Причина – формальне засвоєння виконання множення звичайного дробу на ціле число, несформовані навички самоконтролю.

– Виконуючи ділення дробів, ділення замінюють множенням, але дільник не замінюють оберненим, наприклад: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$; $a : \frac{b}{c} = \frac{ab}{c}$. Такі помилки є

результатом того, що учні не знають правила ділення на дріб; не вміють перевірити свої відповіді через підставляння числових значень. Внаслідок помилкової асоціації, сформованої під час множення звичайних дробів, учні допускають помилки, виконуючи ділення раціональних дробів.

Алгебраїчні помилки учні допускають з різних причин. Тому важливо і необхідно вчасно з'ясовувати походження цих помилок, причини їх появи та добирати належний методичний прийом для їх попередження та усунення.

Необхідною складовою попередження помилок учнів з алгебри є дотримання зв'язку з попереднім матеріалом під час вивчення нового рівня певної змістової лінії. Тому перед вивченням теми: «Раціональні вирази» вчителю важливо організувати повторення та відтворення вивченого раніше базового матеріалу: *дії над дробами з різними знаменниками, скорочення дробів, властивості степенів, формули скороченого множення, розкладання многочлена та одночлена на множники*. Краще це зробити у вигляді змагання, гри чи турніру. Деякі питання доцільно повторити з допомогою евристичної бесіди або використанням інтерактивної технології «Мозковий штурм», заохочуючи учнів до відповідей на проблемні та провокаційні питання. Приклади таких питань ми пропонуємо у Додатку 3

Найбільшої уваги в підготовці до сприйняття теми «Раціональні вирази» варто приділити повторенню *розкладання на множники одночленів та многочленів*.

Як відомо, найбільше помилок учні допускають під час скорочення раціональних дробів. *Якщо не ліквідувати прогалини в знаннях учнів у розумінні*

скорочення під час виконання дій над звичайними дробами, то ці прогалини стануть першою причиною появи помилок у скороченні різних дробів у подальшому. У Додатку 3 ми розглядаємо приклади таких помилок.

З досвіду роботи відомо, що учні, які знають властивості степенів вміють скорочувати дробу виду: $\frac{18x^4y^3z^2}{24x^3y^2z}$, однак, допускають помилки під час скорочення дробів, якщо в чисельнику або знаменнику знаходиться многочлен. Причина в тому, що учні не вміють виділяти спільні множники. З метою активізації уваги на виділенні спільних множників потрібно під час виконання вже перших завдань домагатися їх виокремлення.

Слушним є правило: щоб скоротити раціональний дріб чисельником і знаменником якого є одночлени, потрібно: виділити для чисельника і знаменника **спільний множник**; поділити чисельник і знаменник на спільний множник.

Приклад. Виділіть в чисельнику і знаменнику запропонованого дробу спільний множник та виконайте скорочення: $\frac{15m^3n^5t^9}{20m^4n^7t^{12}}$.

Розв'язання цього завдання з учнями доцільно подати у вигляді карти знань, яка слугуватиме їм зразком того, як треба діяти під час виконання інших вправ.

Таблиця 2.4

Алгоритмічний припис скорочення раціонального дробу, чисельником і знаменником якого є одночлени

Завдання	Алгоритмічний припис
$\frac{15m^3n^7t^9}{20m^4n^5t^{12}} = \frac{5m^3n^5t^9 \cdot 3n^2}{5m^3n^5t^9 \cdot 4mt^3} = \frac{3n^2}{4mt^3}$	1. Знайдемо НСД чисел 15 і 20. НСД (15 ; 20)=5. 2. Складаємо добуток спільних змінних в чисельнику і знаменнику, вибираючи їх з найменшим показником: $m^3n^5t^9$. 3. Визначаємо спільний множник для чисельника і знаменника: $5m^3n^5t^9$. 4. Поділимо чисельник і знаменник на спільний множник.

Правильне скорочення дробів у подальшому, значною мірою буде залежати від умінь учнів розкласти многочлени на множники за допомогою формул скороченого множення, зокрема, формули квадрата двочлена.

Для запобігання помилок, типу: $4a^2 - 6ab + 9b^2 = (2a - 3b)^2$ (**), які часто зустрічаються, систему завдань на повторення доцільно доповнювати контрприкладми. Наприклад: Розкладіть на множники:

- | | | |
|------------------------|--|------------------------------------|
| 1) $a^2 + 6a + 9$; | 4) $a^2 - 2a + 4$; | 7) $\frac{1}{4}m^2 + 2mn + 4n^2$; |
| 2) $b^2 - 4ab + 16$; | 5) $x^2 + 2x + 1$; | 8) $9p^2 - pq + \frac{1}{36}q^2$; |
| 3) $d^2 + c^2 - 2cd$; | 6) $\frac{4}{9}b^2 - \frac{4}{3}b + 1$; | 9) $1 - 3x + 9x^2$. |

Якщо учень звертає увагу тільки на наявність квадратів двох чисел і не перевіряє, чи є третій член їх подвоєним добутком, то він правильно виконає перші три завдання, але допустить помилку, типу (**) у 4 завданні. Після аналізу помилки, учні, причому без нагадувань учителя, починають перевіряти, чи є третій член тричлена подвоєним добутком. Через деякий час вони знову втрачають увагу і в завданні 9 (контрприкладі) допустять помилку. Після виправлення будуть працювати ще уважніше. Така підсилена увага підтримується внаслідок доповнення до наступних завдань ще одним-двома контрприкладми (така система вправ задовольняє принцип повноти). Як результат, у подальшому учні уважніші і допускають значно менше помилок типу (**).

Досвід і практика навчання переконує, що саме під час скорочення раціональних дробів, в силу особливостей підлітків, ефективним є використання завдань із «пастками», наприклад:

Спростіть вираз: $\frac{35xz^5}{7xz^5}$; $\frac{2a(x+3)}{a^2(x+3)}$; $\frac{x^2(5x-1)}{5xy^2-y^2}$; $\frac{x^9-x^8}{x^8-x^7}$; $\frac{4a^4-8a^3}{12a^2-6a^3}$.

Щоб запобігти появі помилок, типу:

$$\text{а) } \frac{3a+b}{3c} = \frac{a+b}{c}; \text{ б) } \frac{a+b}{ac} = \frac{b}{c}; \text{ в) } \frac{a+b}{a} = b; \text{ г) } \frac{5a^2b-a^2c-2b}{a} = 5ab-ac-2b;$$

$$д) \frac{2(7a+3b)-(7a-3b)}{7a-3b} = 2(7a+3b); е) \frac{18m^2+12mn}{9m^2+12mn+4n^2} = \frac{18m^2}{9m^2+4n^2}$$

вчителю необхідно постійно акцентувати увагу учнів на тому, що *скоротити дріб* – означає поділити чисельник і знаменник дробу **на спільний множник**. Отже, *необхідною умовою скорочення дробу є подання його чисельника і знаменника у вигляді добутку*.

На початковому етапі засвоєння варто постійно підкреслювати, що **ділення відбувається не на спільне число, не на спільний вираз, а на спільний множник**. Таким чином виключати можливість скорочення дробу на спільний доданок. Для кращого запам'ятовування такого правила варто з учнями скласти опорну таблицю:

Таблиця 2.5

Алгоритмічний припис скорочення раціонального дробу, чисельником якого є многочлен, знаменником – одночлен

СКОРОЧЕННЯ РАЦІОНАЛЬНИХ ДРОБІВ	
Приклад	Алгоритмічний припис
Скоротити дріб: $\frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2}$. 1) розкладемо на множники чисельник, (винесемо за дужки спільний множник $5x$): $\frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2} = \frac{5x(x-y)}{5(x-y)^2}$; 2) спільний множник для чисельника і знаменника - $5(x-y)$; 3) ділимо чисельник і знаменник на $5(x-y)$ і одержуємо дріб $\frac{x}{(x-y)}$. 4) перевірка: $\frac{x \cdot 5(x-y)}{(x-y) \cdot 5(x-y)} = \frac{5x^2-5xy}{5(x-y)^2} = \frac{5x(x-y)}{5(x-y)^2}$.	Для того, щоб скоротити дріб необхідно: 1) розкласти чисельник і знаменник дробу на множники; 2) вибрати спільний множник для чисельника і знаменника дробу; 3) розділити чисельник і знаменник дробу на спільний множник; 4) перевірити результат оберненою дією.

В алгоритмічний припис бажано включати вимогу, яка б змушувала учня контролювати свої дії. Це дозволить відразу знаходити допущені помилки та виправляти їх. Адже, якщо дії самоконтролю учня багаторазово будуть

повторюватись, то поступово звертаючись, стануть необхідним компонентом сформованої узагальненої асоціації.

Успішному формуванню уміння безпомилково виконувати скорочення дробів сприяє правильно дібрана послідовність вправ. Приклади таких вправ ми пропонуємо в додатку 3.

Послідовність міркувань, які повторюються під час розв'язування завдань одного типу може згортатися, а в подальшому за необхідності – розгортатися. Однак, не у всіх учнів зворотний процес – розвертання – відбувається без втрат суттєвих елементів міркування. Тому з метою безпомилкового засвоєння матеріалу бажано під час скорочення раціональних дробів не поспішати із звертанням дії, а домагатися як можна частіше посилатися на правило чи алгоритм.

У дослідженні ми значну увагу приділяли провокаційним питанням і завданням. З точки зору психології систематичне використання «провокаційних» вправ підвищує увагу учнів, сприяє правильності міркувань, розвиває самоконтроль.

Приклад: Чи правильний результат отримав учень, виконуючи скорочення дробів:

$$\text{а) } \frac{a+b}{b+x} = \frac{a}{x}; \quad \text{б) } \frac{2a-6x^2}{3x^2+c} = \frac{2a-2}{c}; \quad \text{в) } \frac{4x+3y}{3y} = 4x; \quad \text{г) } \frac{ac+bd}{am+bn} = \frac{c+d}{m+n}?$$

У процесі виконання цього завдання учні мають виявити помилки, пояснити, чи можна взагалі дати стверджувальну відповідь на поставлене питання з теоретичної точки зору та підтвердити свої міркування. Перевірити, підставивши певні числові значення у праву і ліву частини рівностей. Щоб краще запам'яталось виконання такого завдання, необхідно його супроводжувати позитивними емоціями, використовуючи гру та заохочення.

Під час скорочення дробів важливо звернути увагу учнів на те, що внаслідок виконання такого перетворення множина допустимих значень змінних може розширитись, показати приклади та обґрунтувати. Це сприятиме попередженню

помилки під час розв'язування дробово раціональних рівнянь, побудови графіків функцій.

Як показують наші дослідження, ефективним засобом попередження помилок під час скорочення дробів є система вправ, в яку доцільно четвертим, восьмим та дванадцятим завданням включати завдання у виконанні яких допускаються типові помилки учнів. «Наштовхування» учнів, яким здається все зрозумілим, на виконання помилкових дій сприяє осмисленню виконання наступних дій. Попередженню поширених помилок учнів під час виконання дій з раціональними дробами сприяє повторення дій над звичайними дробами, виправлення сформованих помилкових асоціацій.

Особливу увагу варто приділити *зведенню дробів до спільного знаменника*. Пригадати правила зведення до спільного знаменника, якщо: знаменниками дробів є взаємно прості числа; кратні числа; числа, які є ні взаємно простими, ні кратними.

Трапляються випадки, коли учні під час тотожних перетворень алгебраїчних виразів відкидають спільний знаменник дробів. Наприклад:

$$\frac{x^2 - 2x}{x - 3} - \frac{4x - 9}{x - 3} = x^2 - 2x - 4x + 9 = x^2 - 6x + 9.$$

Тут учні застосовують хибну аналогію, поширюючи властивість рівняння на тотожні перетворення алгебраїчних дробів. Щоб викоринити таку помилку, потрібно докладно розкрити суть властивостей рівнянь.

У роботі з помилками важливим є прийом використання контрприкладів. Якщо учень скорочує дріб $\frac{ac + b}{ad + m}$ на a , доцільно запропонувати йому водночас виконати скорочення дробу $\frac{a(c + b)}{a(d + m)}$, де дістаємо такий результат, як попередній, хоча, очевидно, що дані дроби різні, в чому можна пересвідчитись, підставивши в кожен з них конкретні числові значення.

Тотожні перетворення цілих та дробових раціональних виразів у курсі алгебри основної школи займають важливе місце. Тому вчителю необхідно прикласти максимум зусиль, використати доцільні методи, засоби та прийоми в

роботі з попередження та недопущення помилок учнів як під час вивчення теми, так і під час використання набутих знань у процесі розв'язування рівнянь та нерівностей, вивченні властивостей функцій.

2.2. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності»

У курсі алгебри основної школи предметом вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» є *лінійні, квадратні та дробово-раціональні рівняння; лінійні, нерівності другого степеня та дробово-раціональні нерівності*.

Рівняння і нерівності в основній школі є тим об'єктом, де безпосередньо застосовуються тотожні перетворення алгебраїчних виразів. Враховуючи, що учні допускають значну кількість помилок саме в тотожних перетвореннях виразів, то використання цих перетворень у розв'язуванні рівнянь є ще одним ефективним методичним засобом виявлення і усунення цих помилок.

Існує тісний зв'язок між вивченням рівнянь і нерівностей з іншою змістовою лінією курсу алгебри – елементарними функціями. З одного боку, розв'язування рівнянь, нерівностей та їх систем передбачає урахування властивостей відповідних функцій, а з іншого – вивчення функцій включає використання апарату рівнянь.

Отже, помилки, яких припускаються учні під час вивчення тотожних перетворень виразів, можуть повторюватись і під час вивчення рівнянь, нерівностей та функцій. Тому для здійснення ефективної *превентивної діяльності* під час вивчення рівнянь і нерівностей учитель має знати «тонкі місця» у засвоєнні навчального матеріалу всіх інших змістових ліній.

Вивчення психолого-педагогічної літератури, власний педагогічний досвід роботи в школі, досвід, набутий під час викладання дисципліни «Методика навчання математики», проведені контрольні роботи під час констатувального експерименту, аналіз помилок, допущених учнями під час виконання робіт зовнішнього незалежного оцінювання та проведений лабораторний психолого-

дидактичний експеримент дали нам змогу виділити найпоширеніші помилки учнів, яких вони припускаються під час розв'язування рівнянь та нерівностей.

Зупинимось детальніше на організації превентивної діяльності під час вивчення рівнянь і нерівностей.

2.2.1. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Рівняння»

Лінійні рівняння з однією змінною. Розв'язуючи лінійні рівняння учні, як правило, допускають помилки, пов'язані або з тотожними перетвореннями виразів, або з порушенням рівносильності рівнянь, або з неправильним застосуванням формул загальних розв'язків. Часто, розв'язуючи рівняння, що зводяться до лінійних, учні не можуть знайти корені рівнянь $0 \cdot x = 0$, та $0 \cdot x = b$, де $b \neq 0$, що стає причиною грубих помилок. Тому під час засвоєння поняття лінійного рівняння у 7 класі, важливо, щоб учні навчилися розв'язувати рівняння, які мають безліч коренів, один корінь та не мають коренів взагалі.

З практики відомо, що учні, які не зрозуміли суті розв'язування таких рівнянь, виконавши відповідні перетворення, наприклад, в рівняннях:

$\begin{aligned} \text{а) } 4(3x-12) &= 12x-16; \\ 12x-48 &= 12x - 16; \\ 12x - 12x &= 32; \\ 0 &= 32. \end{aligned}$	$\begin{aligned} \text{б) } 4(3x-12) &= 12x -48; \\ 12x-48 &= 12x -48; \\ 12x-12x &= 48-48; \\ 0 &= 0 \end{aligned}$
---	--

не завжди можуть безпомилково записати остаточну відповідь для кожного з них. Складність полягає в тому, що, дістаючи після спрощення рівності $0 = 32$, $0=0$, школярі не розуміють, як за допомогою цих рівностей (істинних або хибних) зробити висновок про корені кожного з рівнянь. Роз'ясненню незрозумілого сприяє опорний конспект, складений учнями за допомогою вчителя:

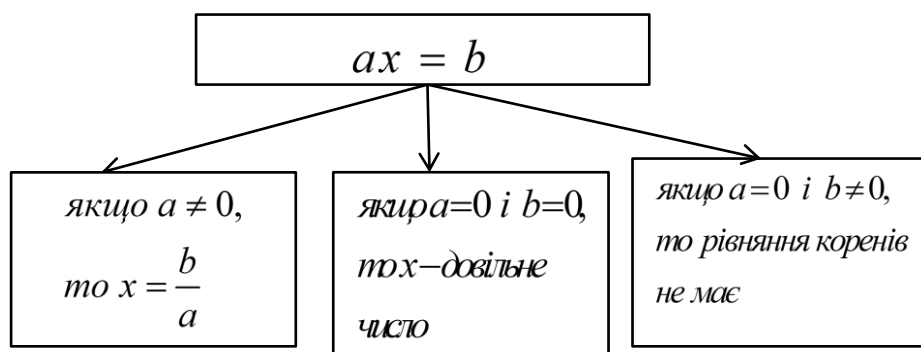
Опорний конспект до теми «Лінійні рівняння»

а) $4(3x-12) = 12x-16$; $12-48 = 12x - 16$; $12x - 12x = 32$; $(12 - 12)x = 32$, $0x = 32$. В. Розв'язку немає	б) $4(3x-12) = 12x- 48$; $12x-48 = 12x- 48$; $12x-12x = 48- 48$; $0x = 0$. (Розв'язком є будь-яке число) В. Безліч розв'язків	в) $4(3x-12) = 8x - 48$; $4(3x-12) = 8x - 48$; $4x = 0$. $x = 0$. В. Один розв'язок
<u>Пояснення:</u> Не існує такого числа, яке б помножили на нуль і одержали 32.	<u>Пояснення:</u> Під час множення на нуль будь-якого числа, добуток завжди дорівнює нулю.	<u>Пояснення:</u> Добуток двох множників дорівнює нулю, якщо хоча б один з них дорівнює нулю.

Цей конспект ми пропонуємо взяти за основу на перших етапах вивчення теми. Допомагає також створення асоціації множення на нуль: якщо нуль назвати «ніщо», то в добутку на «ніщо», має бути «ніщо». Ефективним є таке завдання: з'ясуйте, яке з даних рівнянь має лише один розв'язок, не має розв'язків, має безліч розв'язків:

$$1) -5x = -3; 2) 0x = 0; 3) 0,14x = 0; 4) 7 = 0x; 5) \frac{3}{4}x = -5; 6) -5x = -12.$$

Кращому осмисленню сприяє виконання учнями самостійно наступного завдання: придумайте та занотуйте в зошити приклади трьох лінійних рівнянь, які мають лише один розв'язок, трьох лінійних рівнянь, які не мають розв'язків та трьох лінійних рівнянь, які мають безліч розв'язків. Така самостійна робота є ефективною, якщо учні після її виконання аргументують свої відповіді та висловлюють думки щодо відповідей однокласників. Систематизувати дані про розв'язки лінійного рівняння $ax=b$ можна у вигляді схеми:



Вже на початку вивчення змістової лінії «Рівняння і нерівності» важливо, щоб учні зрозуміли зміст понять: рівносильні рівняння та рівносильні перетворення.

Розглянемо ще декілька поширених помилок учнів:

– Під час звільнення цілих раціональних рівнянь від знаменника учні не виконують множення обох частин рівняння на НСЗ.

Наприклад, під час розв'язування рівняння $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = 1$, пишуть $2(2x+1) + 3(x-3) = 1$, замість $2(2x+1) + 3(x-3) = 6$.

Причиною помилки є формальне засвоєння властивостей, які перетворюють рівняння на рівносильні їм рівняння. Також помилка може бути наслідком «хибної» аналогії з розв'язуванням рівнянь, права частина яких дорівнює нулю (традиційно: зліва невідомі члени рівняння, справа – відомі). Те, що після перетворення лівої частини права залишається незмінною спонукає деяких учнів до висновку, що права частина рівняння незмінна і тоді, коли вона відмінна від нуля.

З метою попередження вказаних помилок, доцільно рівняння, в яких права частина дорівнює нулю і відмінна від нуля, розглянути одночасно, відзначити *спільне* та *відмінне*, разом з учнями скласти алгоритмічний припис розв'язування таких рівнянь, систему вправ доповнити вправами, що провокують на помилку, згідно з закономірністю П. О. Шеварьова.

Важливо вже на перших уроках вивчення лінійних рівнянь сформувати звичку вказувати справа через риску множник, на який потрібно помножити обидві частини рівняння. Експериментально нами перевірено: якщо учні користуються таким прийомом, помилок менше:

$$\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = 1 / \cdot (6); \frac{6(2x+1)}{3} + \frac{6(x-3)}{2} = 1 \cdot 6; 2(2x+1) + 3(x-3) = 6.$$

Запобіганню помилок також буде сприяти звичка учнів завжди писати над окремими доданками додаткові множники навіть, якщо права частина рівняння дорівнює нулю.

– У випадку, коли коефіцієнт біля невідомого більший за вільний член, учні знаходять невідомий член рівняння діленням більшого числа на менше, наприклад: $15x = 3$; $x = 5$ (замість $3/5$). Пояснюємо це сформованою асоціацією з початкової школи, де завжди виконувалось ділення більшого на менше число.

Причиною помилок можуть бути також прогалини у знаннях з математики 6 класу: а) $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 3}{3 \cdot 4} = 2$ (замість $1/2$); б) $1\frac{2}{3} : x = 11\frac{2}{3}$; $x = \frac{5 \cdot 3}{3 \cdot 35} = 7$ (замість $1/7$).

З метою попередження таких помилок, необхідно пояснити учням чому важливо під час скорочення дробів на місці скорочених чисел та змінних не втрачати, а записувати одиницю як результат ділення. Школярам слід частіше пропонувати вправи на скорочення дробів, виконання множення чи ділення дробів, знаходження невідомих членів пропорцій, в яких результат є дробом виду $\frac{1}{n}$. Важливо, щоб учні вміли *перевіряти результат оберненою дією*. В окремих випадках, важливо щоб учні осмислено використовували властивість: якщо обидві частини рівняння поділити на одне й те ж число, відмінне від нуля, то одержується рівняння рівносильне даному, виконували ділення обох частин рівняння на коефіцієнт біля невідомого та *показували справа через риску число, на яке ділиться ліва і права частини рівняння*: $24x = 5 / (:24)$; $\frac{24x}{24} = \frac{5}{24}$, $x = \frac{5}{24}$.

– На останньому етапі розв'язування рівняння учні досить часто втрачають знак «-» у результаті, вважаючи, що здійснено перенесення в іншу частину рівняння коефіцієнта біля невідомого, наприклад: а) $-7x = 21$; $x = 3$.

Попередженню такої помилки сприяє той же методичний прийом, що і в попередніх випадках. Доведене до автоматизму «правило rischi» на останньому етапі розв'язування рівняння сприяє безпомилковому знаходженню розв'язку рівнянь.

Правильний запис: а) $-7x = 21 / :(-7)$; $\frac{-7x}{-7} = \frac{-21}{-7}$; $x = -3$.

Окрему увагу потрібно звернути на розв'язування рівнянь виду:

$\frac{x}{9} = 5$ та $\frac{27}{x} = 3$. Часто учні затрудняються у розв'язуванні таких рівнянь,

зовнішня незвичність лівої частини їх зупиняє.

Необхідно навчити учнів записувати такі рівняння у вигляді пропорції, а основну властивість пропорції вони, як правило, добре знають.

– Особливо поширена помилка у випадку, коли невідоме з від'ємним коефіцієнтом знаходиться не на першому місці лівої частини рівняння, наприклад: а) $18 - z = 24$, $z = 24 - 18$, $z = 6$; б) $b - t = a + c$, $t = a + c - b$.

Запобігання таких помилок сприяє розв'язування достатньої кількості спеціально дібраних рівнянь, в яких коефіцієнт біля невідомого дорівнює -1. Учні мають усвідомити, що $-a$ означає: -1 помножити на a , і це дуже важливо.

– Часто учні після вивчення десяткових дробів прагнуть записати корінь рівняння у вигляді десяткового дробу навіть у старших класах. Однак неспроможні це зробити у випадках, коли звичайний дріб не можна записати у вигляді скінченного десяткового дробу. У даному випадку вчителю потрібно акцентувати увагу учнів на тому, що:

– не завжди доцільно записувати частку у вигляді десяткового дробу, її можна залишити у вигляді звичайного дробу (правильного і нескоротного);

– звичайний дріб можна подати у вигляді скінченного десяткового дробу тільки в тому випадку, коли знаменник дробу можна подати у вигляді добутку: а) двійок; б) п'ятірок; в) двійок і п'ятірок;

– характерними є помилки учнів під час перенесення доданків із однієї частини рівняння в іншу. Часто вони не змінюють знаки доданків на протилежні.

Наприклад: $14x + 12 = 44$; $14x = 56$; $x = 4$.

Щоб запобігти таким помилкам, можна звернутись за допомогою до ейдетики, оживити рівняння, створити певну асоціацію. Враховуючи, що рівносильні перетворення рівнянь учні виконують у молодшому підлітковому віці і дидактична гра є ефективним засобом навчання та розвитку інтересу до предмета, потрібно вчити школярів створювати свої асоціації, наприклад, пов'язані із зміною знаків. Асоціація може, наприклад, бути такою: нехай знак

рівності – це річка, між двома берегами якої живуть члени рівняння. Коли вони перетинають річку, їм доводиться замочити одяг (змінити знак коефіцієнта на протилежний).

Таких асоціацій може бути багато, головне, щоб учитель на кожному уроці вчив дітей думати, створювати свої асоціації для запам'ятовування, спостерігати, аналізувати, виділяти головне, співставляти, порівнювати та робити висновки. У превентивній діяльності ми надавали особливого значення *розвитку мислення школярів та формуванню алгоритмічної культури*.

Квадратні рівняння. Найбільшу кількість помилок під час розв'язування *квадратних рівнянь* учні допускають у знаходженні дискримінанта, зокрема, у тому випадку, коли вільний член від'ємний. З метою попередження таких помилок, варто пропонувати учням перед обчисленням дискримінанта *обов'язково* виписувати коефіцієнти та вільний член, враховуючи загальний вигляд квадратного рівняння: $ax^2 + bx + c = 0$, a, b, c – числа ($a \neq 0$), x – змінна. В *алгоритмі* розв'язування рівняння: $3x^2 + 2x - 4 = 0$, першою дією має бути визначення коефіцієнтів: $a = 3$, $b = 2$ та вільного члена: $c = -4$.

Щоб попередити помилки у знаходженні коренів квадратного рівняння за формулою: $\frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ вчителю необхідно акцентувати увагу учнів на тому, що $-b$ означає b з протилежним знаком. З метою осмислення запропонувати такі завдання:

а) чому дорівнює $-b$, якщо $b = 8; 2,5; -23; -92; 41; -19$;

б) чому дорівнює b , якщо $-b = 17; -32; 21; -18; 0$.

Під час вивчення теми «Квадратні рівняння» учні рідко допускають помилки в розв'язуванні неповних квадратних рівнянь, однак затрудняються їх розв'язувати в старших класах у випадку розв'язування рівнянь, що зводяться до квадратних. Ми пояснюємо це тим, що матеріал нескладний, тому швидко забувається. Звичайно, можна показати, що загальну формулу розв'язування квадратних рівнянь можна використовувати і для неповних квадратних рівнянь. Однак, такі розв'язування не є раціональними. Щоб запобігти забуванню,

доцільно посприяти кращому запам'ятовуванню, а для цього ми пропонуємо актуалізувати зорову пам'ять. На початку вивчення теми скласти разом з учнями карту знань та дозволити користуватися протягом уроку. Приклад такої карти знань ми пропонуємо у Додатку Л.

Учні будуть краще знати і пам'ятати раціональні способи розв'язування неповних квадратних рівнянь тоді, коли вмітимуть самостійно наводити приклади таких рівнянь та усно знаходити їх розв'язки, пропонувати свої контрприкладі. Усвідомлення та закріплення теоретичного матеріалу доцільно проводити у вигляді змагань, пропонувати творчі самостійні роботи.

Варто зауважити, що у процесі розв'язування рівнянь виду $(ax + b)(cx + d) = 0$, учні майже не допускають помилок. Але через деякий час вони не помічають істотної відмінності, наприклад між рівняннями $(x - 4)(x + 8) = 0$ та $(x - 4)(x + 8) = 5$ і, неправильно використовуючи метод аналогії, друге рівняння розв'язують помилково: $(x - 4) = 5$, $x = 9$, або $(x + 8) = 5$, $x = -3$. У помилковому розв'язанні учні легко переконуються, якщо запропонувати їм зробити перевірку (якщо в учнів сформовані навички самоконтролю, вони свою помилку знайдуть відразу).

З метою запобігання таких помилок ефективним засобом є включення в систему вправ завдань, які будуть провокувати учнів на помилку. Як відомо, такі завдання сприяють вихованню уважності та глибшому розумінню поставлених задач. Наприклад:

$$(x - 12)(x - 1) = 0; (x - 1)(x + 8) = 0; (x + 5)(x - 5) = 0; (x - 4)(x + 4) = 2.$$

Щоб учні вміли використовувати аналогію в комплексі з іншими прийомами мисленнєвої діяльності і в першу чергу з прийомами порівняння і конкретизації, потрібно їх навчати не тільки знаходити спільне в явищах, об'єктах, задачах, але й вловлювати суттєві, хоч і мало помітні відмінності.

Дробові раціональні рівняння. Варто звернути увагу на те, що часто помилки в учнів з'являються внаслідок невміння розпізнавати ціле раціональне

рівняння $\frac{2x+1}{3} + \frac{x-3}{2} = 1$ та дробове раціональне рівняння $\frac{5-x}{x-1} - \frac{5+3x}{x^2-1} = 0$ з

огляду на зовнішню схожість. Оскільки цілі рівняння розглядались першими, учні засвоюючи способи їх розв'язування, звертають увагу на наявність знаменника (щось нове, незвичне). Тому внаслідок хибної аналогії під час сприймання дробових раціональних рівнянь учні їх розв'язують аналогічно. Домножують ліву і праву частини рівняння на найменший спільний знаменник і забувають виключити з розв'язків ті значення змінної, які перетворюють знаменник на нуль, внаслідок чого з'являються сторонні корені.

Приклад. Розв'язати рівняння

$$\frac{5-x}{x-1} - \frac{5+3x}{x^2-1} = 0.$$

Неправильне розв'язання: помножили всі члени рівняння на $(x^2 - 1)$.

$$\text{Одержали } (5-x)(x+1) - (5+3x) = 0.$$

Відповідь: 0; 1.

Відповідь неправильна, тому що $x = 1$ перетворює знаменник дробу в нуль.

Учитель має навчити учнів розрізняти цілі та дробові раціональні рівняння за зовнішнім виглядом і після цього вибирати спосіб розв'язування. Тому під час вивчення дробово-раціональних рівнянь необхідно систему вправ доповнювати цілими рівняннями із числовими знаменниками.

Для запобігання помилок у процесі розв'язування рівнянь, які з'являються внаслідок неправильної дії віднімання дробів, необхідно рекомендувати учням записувати від'ємник у чисельнику в дужках. Виключенням можуть бути тільки ті учні, які цю дію завжди виконують правильно.

З аналізу результатів складання ДПА та ЗНО відомо, що найбільше помилок під час розв'язування рівнянь і нерівностей учні допускають внаслідок не рівносильних перетворень, що призводить до втрати коренів чи появи сторонніх.

Зважаючи на те, що змістова лінія тотожних перетворень тісно переплетена із змістовою лінією рівнянь, основу для правильного розв'язування дробових раціональних рівнянь необхідно, як ми відзначали в попередньому пункті, закладати ще під час вивчення перетворень дробово-раціональних виразів.

Незвичність запису рівняння, яке містить дію ділення на вираз із змінною, повинно асоціюватись із словом «УВАГА!». (*Увага ділення!* ).

Не порушуючи принципу науковості навчання, вчитель має пам'ятати, що перед ним перш за все діти. А діти краще запам'ятовують те, що супроводжується чимось незвичним, позитивними емоціями. У підручнику викладено зміст навчального матеріалу, а забарвлює сприйняття цього матеріалу у яскраві кольори саме вчитель. Від нього залежить, як засвоять і запам'ятають цей матеріал його учні.

Щоб навчити учнів безпомилково розв'язувати дробові рівняння, варто застосовувати *алгоритмічний підхід та включати до системи вправ рівняння під час розв'язування яких з'являються сторонні корені*.

Учні мають засвоїти, що сторонні корені з'являються у таких випадках:

1. Під час скорочення дробу на множник, який містить невідоме.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\frac{x^2 - 81}{x - 9} - 2x = 0$.

Неправильне розв'язання: Скоротили дріб $\frac{(x-9)(x+9)}{x-9} - 2x = 0$ на $(x-9)$.

Отримали $x + 9 - 2x = 0$. Відповідь: $x = 9$. Відповідь неправильна, тому що $x = 9$ перетворює знаменник дробу в 0.

2. Під час зведення подібних доданків, що містять невідоме в знаменнику (у тому випадку, якщо подібні доданки взаємно знищуються).

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $x^2 - \frac{2}{3x^2} - 4x + \frac{2}{3x^2} = 0$.

Неправильне розв'язання: звели подібні доданки, одержали $x^2 - 4x = 0$;

$x = 0$; $x = 4$. Відповідь: 0; 4. 0 не є коренем даного рівняння, оскільки при $x=0$, знаменник дорівнює нулю.

Щоб попередити такі помилки, учням доцільно занотувати та запам'ятати випадки появи сторонніх коренів:

сторонні корені можуть з'явитися під час:

- множення обох частин рівняння на вираз, що містить невідоме;
- скорочення дробів на множник, що містить невідоме;

- зведення подібних членів рівняння;
- піднесення обох частин рівняння до степеня;

У школі вивчають декілька способів розв’язування дробових раціональних рівнянь. Враховуючи обмін думками з досвідченими вчителями математики та психологічні особливості восьмикласників, рівень їхнього розвитку, закономірності уваги та запам’ятовування, ми дотримуємося єдиної думки: кожен з алгоритмічних приписів розв’язання дробових раціональних рівнянь необхідно починати з пошуку ОДЗ (області допустимих значень) змінної в рівнянні. А перед тим, як записати відповідь, обов’язково перевірити чи належать ОДЗ знайдені корені рівняння. Так в учнів може сформуватися **стійка орієнтовна основа дій**.

У чинних альтернативних підручниках у деяких зразках розв’язування рівнянь виконується перевірка підставленням в початкове рівняння, а в деяких знаходиться область допустимих значень змінної. Автори вважають, що учень повинен сам, орієнтуючись на ці зразки, зробити висновок про те, коли до алгоритму розв’язування рівняння входить перевірка підставленням в початкове рівняння, а коли ні. Але навіть у кінці вивчення курсу алгебри, деякі учні так і не усвідомлюють, в яких випадках перевірка є обов’язковою складовою частиною розв’язування рівнянь.

Якщо розв’язком рівняння є дробові або ірраціональні числа, школярі губляться і хвилюються, що щось зробили неправильно, хоча в даному випадку відповідь має бути саме такою. Вважаємо це наслідком не сформованого самоконтролю учнів. Школярі, які не вміють перевіряти свої дії, завжди чекають перевірки вчителя та його оцінки. Тому вже під час перших самостійних робіт з розв’язування рівнянь варто наголошувати, що роботи приймаються тільки після перевірки чи є одержане число коренем рівняння (наприклад, шляхом підставлення одержаного значення змінної у початкове рівняння). Можна домовитися: після розв’язування кожного рівняння учні ставлять крапку тільки в тому випадку, якщо вони його перевірили.

Взагалі, з метою недопущення помилок та своєчасного виправлення непомічених помилок у процесі виконання завдання, ми пропонуємо в кінці

виконаного завдання ставити крапку. Ця крапка має свідчити про те, що учень своє завдання перевінив і впевнений у правильному його виконанні. *Перевірка полягає не в тому, щоб переглянути шлях розв'язування знову, а у виконанні чи оберненої дії, чи підставленням числових значень, чи сформованим умінням знаходити контрприклад, чи прикидкою.*

Під час розв'язування різних дробових раціональних рівнянь перевірку вважаємо необхідною складовою і пропонуємо включати її в алгоритмічні приписи розв'язування цих рівнянь. Приклади таких алгоритмічних приписів ми пропонуємо у Додатку М.

Найбільше помилок внаслідок несформованого самоконтролю, які допускали учні у процесі експериментального навчання, ми виявляли під час розв'язування систем лінійних рівнянь. Методи розв'язування школярі знають, розв'язують системи, а перевірку не здійснюють. Іноді нашвидкоруч у перше рівняння ще можуть підставити одержане числове значення змінної, а те, що знайдене число не задовольняє друге рівняння, залишається поза увагою. Як наслідок – низькі оцінки. І тільки ті учні, які вміють здійснити самоперевірку одержують значно вищий бал.

Звичайно, належне місце у вивченні алгебри необхідно приділяти різним формам і методам перевірки (перевірка в парах, взаємоперевірка в групах тощо). Однак, таку перевірку ми вважаємо перевіркою констатації факту допущеної помилки, а перевіркою з недопущення помилки є високий рівень розвитку самоконтролю. Над таким розвитком в учнів навичок превентивної діяльності і повинен весь час працювати вчитель. Учні мають постійно бачити, що вчитель вважає самоконтроль одним із важливих етапів навчальної діяльності. Вміння здійснити самоконтроль під час виконання будь-яких завдань нівелює острах припуститися помилки. Учні, які здатні перевірити свої дії, впевнено виконують завдання, а ті, які не вміють себе перевірити – бояться, що можуть неправильно виконати завдання і часто навіть не приступають до його виконання.

Окремої уваги заслуговують такі помилки учнів:

1. *Поява сторонніх коренів під час додавання (віднімання) однакових виразів.*

Приклад. Розв'язати рівняння: $x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}$.

Неправильне розв'язання: $x^2 + \sqrt{x-2} = 6x + \sqrt{x-2}$; $x^2 - 6x = 0$; $x = 0$, $x = 6$.

Відповідь: $x = 0$, $x = 6$.

Оскільки $x = 0$ не входить в ОДЗ рівняння, правильна відповідь: $x = 6$.

2. Поява сторонніх коренів під час розв'язання рівнянь, що містять квадратні корені (поняття ірраціонального рівняння вводиться в старшій школі), під час піднесення обох частин рівняння до квадрата.

Приклад 1. Розв'язати рівняння: $\sqrt{x} = x - 2$.

Неправильне розв'язання: $\sqrt{x} = x - 2$, $x = x^2 - 4x + 4$, $x^2 - 5x + 4 = 0$.

Відповідь: $x = 1$ і $x = 4$. Сторонній корінь: $x = 1$.

Приклад 2. Розв'язати рівняння: $\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$.

$\sqrt{2x+1} = \sqrt{x}$, $2(x+1) = x$; $x = -1$ – сторонній корінь. Відповідь. Рівняння коренів не має.

3. Поява сторонніх коренів під час зведення обох частин рівняння до спільного знаменника.

Приклад. Розв'язати рівняння: $\frac{4}{x+2} + \frac{7}{x+3} = \frac{4}{x^2+5x+6}$

$4(x+3) + 7(x+2) = 4$, $11x = -22$, $x = -2$ – сторонній корінь.

Відповідь. Рівняння коренів не має.

Як відомо, появу сторонніх коренів можна виявити через перевірку, підставлянням знайдених чисел у задане рівняння.

4. Втрата коренів під час ділення обох частин рівняння на спільний множник, що містить змінну.

Приклад. Розв'язати рівняння: $3x(x-1) = 5(x-1)$.

Неправильне розв'язання: $3x(\cancel{x-1}) = 5(\cancel{x-1})$, $3x = 5$.

Відповідь: $x = 5/3$. Втрачений корінь $x = 1$.

В межах нашого дослідження, враховуючи результати контрольних робіт, ми здійснили аналіз підручників, зокрема, [111, 112, 13, 14] і спробували зрозуміти причини окремих помилок учнів.

Як відомо, у 7 класі учні розв'язують лінійні рівняння шляхом рівносильних перетворень. Основні властивості рівнянь, у підручниках вводяться аналогічно:

1) якщо в будь-якій частині рівняння розкрити дужки або звести подібні доданки, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

2) якщо в рівнянні перенести доданок з однієї частини в другу, змінивши його знак на протилежний, то одержимо рівняння, рівносильне даному;

3) якщо обидві частини рівняння помножити або поділити на одне й те саме відмінне від нуля число, то одержимо рівняння, рівносильне даному.

У 8 класі перед введенням дробових раціональних рівнянь ці ж властивості пригадуються.

Учні помилково вважають, що, наприклад, вирази $\frac{4}{5x}$ і $\frac{-4}{5x}$ є подібними доданками, і не звертають особливої уваги на те, що вирази є дробовими і мають зміст тільки при $x \neq 0$. Як наслідок, неправильне розв'язання рівняння: $\frac{4}{5x} + x^2 - \frac{4}{5x} - 16x = 0$, після додавання подібних доданків, учні одержали: $x^2 - 16x = 0$; $x = 0$; $x = 4$. Відповідь: 0; 4. Помилка очевидна: $x = 0$ – сторонній корінь.

Якщо учні підставляють одержані значення змінних у початкове рівняння, знайдуть помилку, якщо ні, помилка залишиться непоміченою.

Розв'язуючи рівняння за допомогою рівносильних перетворень, учні повинні враховувати ОДЗ заданого рівняння та дотримуватись вимоги збереження правильної рівності під час прямих та обернених перетворень. Також осмислено розуміти, що *областю допустимих значень рівняння є спільна область визначення для всіх виразів, що стоять у лівій та правій частинах рівняння.*

Вчителю варто постійно тримати в полі зору процес *формування в учнів уміння знаходити ОДЗ рівняння та область визначення функції*, звертати увагу на спільне суттєве та відмінне у цих поняттях. В силу розумового розвитку підлітків вони часто не вміють поєднувати ці два поняття і тому допускають грубі помилки.

Щоб запобігти помилок, учні мають знати та вміти використовувати під час розв'язування рівнянь способи знаходження ОДЗ:

- Записати всі обмеження на змінну шляхом розгляду необхідних умов, знайти ОДЗ.
- Записати всі обмеження на змінну, а в кінці перевірити, чи задовольняють одержані значення змінної вказані обмеження.
- На початку не записувати ОДЗ, а обґрунтувати її у процесі перетворень.

Формувати в учнів уміння розв'язувати рівняння за допомогою рівносильних перетворень доцільно шляхом алгоритмічного підходу: розуміння порядку дій, обґрунтування цих дій, промовляння послідовності виконання дій. Таке запам'ятовування послідовності дій сприяє безпомилковому розв'язуванню рівнянь. Варто мати на увазі, що мова йде не про формальне заучування алгоритмів, а про формування вміння осмисленого самостійного вибору учнями алгоритмічного припису та виконання послідовності дій. Приклад такого алгоритмічного припису ми пропонуємо у Додатку Н.

Розглянемо ще один приклад типової помилки учнів при розв'язуванні рівнянь.

Приклад. Розв'язати рівняння $(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$.

Неправильне розв'язання
$$\begin{cases} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ x=-2, \\ x=3. \end{cases}$$

Відповідь: $-2; 3; 5$.

Правильне розв'язання

$(x-5)(x+2)\sqrt{x-3}=0$. ОДЗ: $x \geq 3$.

$$\begin{cases} x-5=0, \\ x+2=0, \\ x-3=0; \end{cases} \begin{cases} x=5, \\ x=-2, \\ x=3. \end{cases}$$
 не входить в ОДЗ.

Відповідь: $3; 5$.

Щоб організована вчителем превентивна діяльність була ефективною, значущою та результативною, потрібно постійно працювати над формуванням в кожного учня уміння перевірити правильність виконаного завдання; стимулювати активну розумову діяльність учнів, здатність осмислювати кожну дію; виховувати уважність та зосередженість. З цією метою варто використовувати різні прийоми, методи та засоби, з поміж яких вкажемо: розгляд завдань, що провокують учнів на помилку; маскування помилок в розв'язаних завданнях; використання «пасток» під час розв'язування вправ; заохочування балами кожної знайденої помилки однокласників; влаштовування змагань команд на виконання завдань без помилок, постійно пропонувати учням вправи на уважність. Важливо, щоб учні могли перевірити розв'язки рівнянь, знайдені аналітичним способом, розв'язавши ці ж рівняння графічно за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, GRAN 1, Advanced Grapher, GeoGebra.

2.2.2. Організація превентивної діяльності під час вивчення теми «Нерівності»

Тема «Нерівності» вважається однією із найскладніших із усіх розділів математики, оскільки під час вивчення нерівностей і під час їх розв'язування допускається найбільша кількість помилок. Зупинимось на тих, що є типовими.

Числові та лінійні нерівності. Часто учні не розуміють, що означає довести нерівність, і навіть не приступають до виконання такого завдання. Тому вже на початку систематичного вивчення числових нерівностей учні мають чітко *засвоїти критерій порівняння двох чисел:*

- якщо різниця двох чисел a і b додатна, то $a > b$;
- якщо різниця двох чисел a і b від'ємна, то $a < b$;
- якщо різниця двох чисел a і b дорівнює 0, то $a = b$.

Для кращого розуміння критерію учні мають ілюструвати кожний з випадків власними прикладами.

Вважаємо за необхідне засвоєння учнями способу доведення нерівностей, який полягає у визначенні знаку різниці лівої і правої частин нерівності. Кожен

учень має зрозуміти й запам'ятати, що для того, щоб довести нерівність, необхідно оцінити відносно нуля різницю лівої і правої частин даної нерівності.

Тому правило-орієнтир доведення нерівностей може мати такий вигляд:

1. Знайти різницю лівої і правої частин нерівності.
2. Порівняти одержану різницю з нулем.
3. Зробити висновок: якщо $a - b > 0$, то $a > b$; якщо $a - b < 0$ то $a < b$, якщо $a - b = 0$, то $a = b$.

Наприклад, щоб довести, що $(a + b)^2 \geq 2ab$ при будь-яких a і b , учні мають: 1. Розглянути різницю лівої і правої частин даної нерівності:

$$(a + b)^2 - 2ab = a^2 + 2ab + b^2 - 2ab = a^2 + b^2.$$

2. Оцінити одержану різницю відносно нуля: $a^2 + b^2 \geq 0$ (сума квадратів двох чисел завжди не менша за нуль). Рівність досягається, якщо $a = b = 0$.

3. Зробити висновок: так, як $(a + b)^2 - 2ab \geq 0$, то $(a + b)^2 \geq 2ab$.

Однією з причин несформованості в учнів уміння доводити нерівності ми вбачаємо у тому, що в чинних підручниках пропонується для розв'язування незначна кількість вправ саме на доведення нерівностей.

Враховуючи те, що процес доведення нерівностей ґрунтується зокрема на знаннях формул скороченого множення, уміннях зводити подібні доданки, виконувати дії над числами з різними знаками, розкривати дужки, перед якими стоїть знак «мінус», з метою попередження помилок, необхідно перед доведенням нерівностей всі ці знання актуалізувати.

Під час засвоєння учнями властивостей числових нерівностей, учителю варто скласти разом з учнями карту знань та особливу увагу звернути на засвоєння таких властивостей:

а) якщо обидві частини правильної нерівності помножити або поділити на одне й те саме від'ємне число та змінити знак нерівності на протилежний, то одержимо правильну нерівність;

б) якщо $a > 0$, $b > 0$ і $a > b$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, оскільки на застосування саме цих

властивостей, внаслідок формального засвоєння, школярі допускають найбільше помилок. Наявні в учнів помилки і під час виконання завдань на оцінку значень виразів. Пропонуємо учням разом з учителем скласти алгоритми оцінки виразів:

$a + b$; $-b$; $a - b$; ab ; $\frac{1}{a}$; $\frac{b}{a}$; $2a - \frac{1}{3}b$ і занотувати в довідник.

Розглянемо типові помилки та причини їх виникнення під час розв'язування учнями **лінійних нерівностей** ($ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, де x – змінна, a і b – деякі числа) з однією змінною.

Алгоритми розв'язування нерівностей та рівнянь, що зводяться до лінійних схожі:

– шляхом рівносильних перетворень задане рівняння (нерівність) звести до лінійного рівняння (лінійної нерівності);

– знайти всі ті значення змінної, за яких рівняння (нерівність) перетворюється в правильну числову рівність (нерівність).

Внаслідок хибної аналогії в учнів нерідко виникає помилкове уявлення про повну аналогію алгоритмів та рівносильних перетворень, тому і з'являються помилки під час множення (ділення) обох частин нерівності на від'ємне число. Причину ми вбачаємо в тому, що розв'язування лінійних рівнянь з однією змінною та рівнянь, які зводяться до лінійних за допомогою рівносильних перетворень, учні вивчали у 7 класі, навчальний матеріал вивчався вперше, і, як все нове, запам'ятався краще; лінійні нерівності вивчаються у 9 класі, іноді вчителі акцентують увагу учнів на тому, що низку нерівностей з однією змінною можна звести до лінійних нерівностей за допомогою рівносильних перетворень, тобто, що нерівності, які зводяться до лінійних розв'язуються *аналогічно* до рівнянь, які зводяться до лінійних. Слово *аналогічно* є ключовим. Так формується помилкова асоціація. Учні вміють розв'язувати лінійні рівняння, а, отже, над розв'язуванням лінійних нерівностей особливо не замислюються. Через це закріплюється хибна звичка не змінювати знак нерівності на протилежний при

множенні (діленні) обох частин нерівності на від'ємне число. Ще на початку вивчення теми, коли вчитель акцентує увагу на тому, що необхідно змінювати знак нерівності, учні помилок допускають менше, однак в старших класах така помилка є типовою. Щоб запобігти цьому, варто з самого початку вивчення нерівностей детально розглянути з учнями суттєве спільне та відмінне між рівняннями і нерівностями. Для цього властивості рівнянь і нерівностей можна розглянути одночасно, поставивши на перше місце властивість, в якій *суттєве різне*.

1. Якщо обидві частини $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж

від'ємне число, то **знак** $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ $\frac{\text{зберігається}}{\text{змінюється на протилежний}}$.

$$\begin{array}{c|c} -5x = 15 | : (-5), & -5 < 15 | : (-5), \\ x = -3. & 1 > -3. \end{array}$$

2. Якщо обидві частини $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ помножити або поділити на одне і те ж

додатне число, то **знак** $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ зберігається.

$$\begin{array}{c|c} 5x = 15 | \cdot 2, & 5 < 15 | \cdot 2, \\ x = 6. & 10 < 30. \end{array}$$

3. Якщо до обох частин $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ додати однакове число, то

знак $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ зберігається.

$$\begin{array}{c|c} 5x - 8 = 12 | +8, & 4 < 12 | +8, \\ 5x = 20, & 4 + 8 < 12 + 8, \\ x = 4. & 12 < 20. \end{array}$$

4. Якщо з однієї частини $\frac{\text{рівняння}}{\text{нерівності}}$ перенести в іншу частину доданки з протилежним знаком, то **знак** $\frac{\text{рівності}}{\text{нерівності}}$ зберігається.

$2x + 4 = 8,$		$5 + 4 < 12,$
$2x = 8 - 4,$		$5 < 12 - 4,$
$2x = 4,$		$5 < 8.$
$x = 2.$		

У подальшому має зміст розв'язування вправ на знаходження розв'язків рівнянь і нерівностей одночасно.

Запобігання вищезгаданих помилок сприяє звичка, сформована при розв'язування лінійних рівнянь: під час знаходження невідомого множника дія ділення записується через похилу риску. До того ж, доцільно відпрацювати звичку в розв'язуванні нерівностей: якщо дільник від'ємний після нього ставити знак оклику, що означає: «увага!».

$x - 5 = 3x + 9,$		$x - 5 > 3x + 9,$
$-2x = 14 : (-2),$		$-2x > 14 : (-2), \triangle$ (зверніть увагу, будьте уважні!)
$x = -7.$		$x < -7.$

Варто зауважити, що в учнів вже на початку вивчення нерівностей з'являються психологічні труднощі в осмисленні результатів розв'язування цих нерівностей. Як відомо, зміст знайденого розв'язку рівняння й нерівності зовсім різний. Учні за допомогою учителя повинні побачити відмінність у тому, що множина розв'язків рівняння в більшості випадків скінченна, тоді як множина розв'язків нерівності в більшості випадків нескінченна. Саме тому й *треба звернути увагу учнів на те, якою є множина розв'язків нерівності*.

Подолати психологічні труднощі в осмисленні результату розв'язування нерівностей допомагає геометричне тлумачення розв'язку рівняння та геометричне тлумачення множини розв'язків нерівності:

$$\begin{aligned}
 4x - 20 &= 28; \\
 4x &= 28 + 20; \\
 4x &= 48 |: 4; \\
 x &= 12 - \text{корінь рівняння}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4x - 20 &> 28; \\
 4x &> 28 + 20; \\
 4x &> 48 |: 4; \\
 x &> 12, \text{ множина розв'язків нерівності } (12; \infty).
 \end{aligned}$$



З метою формування правильних асоціацій і запобігання помилок в подальшому та при розв'язуванні нерівностей вже на перших уроках вивчення нерівностей з однією змінною доцільно разом з учнями скласти таблицю відмінностей між лінійним рівнянням і лінійною нерівністю.

Таблиця 2.7

Таблиця відмінностей між лінійним рівнянням і лінійною нерівністю.

Назва	Лінійне рівняння	Лінійна нерівність
загальний вигляд	$ax + b = 0$, x – змінна, a, b будь-які дійсні числа	$ax + b < 0$, x – змінна, a, b – будь-які дійсні числа
розв'язок	розв'язок рівняння $ax = b$ при $a \neq 0$ зображається <u>однією точкою</u> числової осі	множина розв'язків нерівності $ax + b < 0$ зображається <u>нескінченною множиною точок</u> , які заповнюють проміжок $(\frac{b}{a}; +\infty)$ якщо $a < 0$, і $(-\infty; \frac{b}{a})$ якщо $a > 0$.
множення обох частин на від'ємне число	знак не змінюється	Знак змінюється на протилежний

Закріплення спільного і відмінного між лінійними рівняннями і нерівностями може здійснюватись у формі гри чи змагання.

З практики навчання учнів відомо, що вони часто неправильно ставлять дужки, записуючи розв'язок нерівності, забувають «виколювати» точки на числовій прямій. Запобігання таких помилок сприяє використанню опорної схеми:

$<$	$>$	$\leq$	$\geq$
$($	$)$	$[$	$]$
$\circ$	$\circ$	$\bullet$	$\bullet$

Таку схему учні можуть скласти самі або з допомогою вчителя, зобразити її на полях і користуватися протягом вивчення всієї теми.

Типовими є помилки, яких припускаються учні тоді, коли нерівність виду $ax < b$ ($ax > b$) задовольняє будь-яке число, або коли така нерівність не має розв'язків, або її розв'язками є всі додатні чи від'ємні числа. Труднощі в тому, що учні, діставши після спрощення числові нерівності виду: $10 > 3$; $4 > 5$; $0 < -5$; $0 > 5$, часто не можуть зорієнтуватися, який зробити висновок про множину розв'язків даної нерівності. Варто спрямувати учнів послідовно замінювати нерівність рівносильною і приводити не до вигляду, наприклад $0 < 5$, а вигляду: $0x < 5$. Запропонувати вказівку: якщо дістали правильну нерівність, то множиною розв'язків є всі дійсні числа або ті проміжки, на яких дана нерівність визначена, а якщо дістали неправильну нерівність, то нерівність не має розв'язків.

Приклад 1. Розв'язати нерівність: $4(2x - 1) - 5x < 3x + 5$.

Розв'язання:

$$4(2x - 1) - 5x < 3x + 5;$$

$$8x - 4 - 5x < 3x + 5;$$

$$3x - 3x < 4 + 5;$$

$$0 \cdot x < 9 \quad (\text{з а в ж д и})$$

Відповідь: множина розв'язків – всі дійсні числа.

Приклад 2. Розв'язати нерівність:

$$3(4x + 1) - 7x < 5x - 8;$$

$$12x + 3 - 7x < 5x - 8;$$

$$5x + 3 < 5x - 8;$$

$$0 \cdot x < -11 \quad (\text{немає таких чисел, щоб отримати правильну нерівність})$$

Відповідь: множина розв'язків порожня.

Часто учні, не задумуючись, можуть продовжити записи і одержати неправильну відповідь:

$3x - 2 < 3x + 5;$ $3x - 3x < 7;$ $0 \cdot x < 7;$ $x < \frac{7}{0}$ (на нуль ділити не можна).	або	$5x - 3 > 7 + 5x;$ $0 \cdot x > 10;$ $x > \frac{10}{0}$ (на нуль ділити не можна).
Відповідь: немає розв'язку.		Відповідь: немає розв'язку.

Засобами упередження таких помилок є усне розв'язування значної кількості нерівностей виду: $0x > 5$; $0x < 0$; $0x \leq -5$; $0x \geq 0$; $0x \geq -3$ та уміння учнів аналізувати нерівність, записану у вигляді $ax < b$ ($ax > b$).

Активізує мислення учнів, розв'язування таких нерівностей:

1) $x > x + 2$; 2) $x + 1 > x$; 3) $x \leq x$; 4) $x + 3 - x < 0$; 5) $0x \geq 4$.

Попередженню помилок сприяють завдання на знаходження помилки.

Наприклад: Знайдіть помилку та вкажіть причину її появи:

1) $-4x - 7 < 5$; $-4x < 12$; $x < 12 : (-4)$; $x < -3$;
 2) $-7x - 9 < 5$; $-7x > 5 + 9$; $-7x > 14$; $x < 14 : (-7)$; $x < -2$.

Значне місце в роботі з помилками займають завдання на розкриття софізмів, наприклад, софізм: якщо $a > b$, де a і b додатні, то $a > 2b$ (детальніше в Додатку П).

Квадратні нерівності. Як відомо, тема «Квадратні нерівності» є опорною для розв'язування тригонометричних, показникових та логарифмічних нерівностей, які часто зводяться до квадратних. З досвіду роботи в школі та результатів констатувального експерименту ми можемо стверджувати, що під час розв'язування квадратних нерівностей учні допускають значну кількість типових помилок.

Перш ніж розглянути «Квадратні нерівності» у 9 класі, учитель повинен актуалізувати всі набуті знання учнів про лінійні нерівності з однією змінною. Особливої уваги заслуговують нерівності, які розв'язуються способом ділення обох частин нерівності на від'ємне число, наприклад: $-2x < 8$; $-2x < 8 : (-2)$ ;
 $x > -4$.

Вивчення квадратних нерівностей тісно пов'язане з властивостями квадратичної функції та її графіком. Для розв'язування квадратних нерівностей треба визначати знак дискримінанта квадратного тричлена, тобто встановлювати чи перетинає парабола вісь Ox і в яких саме точках, врахувати знак коефіцієнта a для визначення напрямку віток параболи. Схематично зображати графік відповідної квадратичної функції та встановлювати множину її додатних значень (для $ax^2 + bx + c > 0$), або від'ємних значень (для $ax^2 + bx + c < 0$).

Прийоми розв'язування квадратних рівнянь і квадратних нерівностей схожі. Внаслідок хибної аналогії учні й допускають більшість помилок. Приклади таких помилок пропонуємо у наступній таблиці.

Таблиця 2.8

**Характерні помилки, які допускають учні під час розв'язування
квадратних нерівностей**

Розв'язання рівнянь	Помилкове розв'язання нерівностей
1. $x^2 = 9, x = \pm 3$	1. $x^2 < 9, x < \pm 3$.
2. $x^2 - 9 = 0$; $(x-3)(x+3) = 0$; $x-3 = 0$ або $x+3 = 0$; $x = 3$ або $x = -3$.	2. $x^2 - 9 < 0$; $(x-3)(x+3) < 0$; $x-3 < 0$ або $x+3 < 0$, $x < 3$ або $x < -3$.
3. $2x^2 + 3x + 1 = 0$, $D = 9 - 4 \cdot 2 \cdot 1 = 1$ $x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = -1$.	3. $2x^2 + 3x + 1 < 0$, $2x^2 + 3x + 1 = 0, D = 1$ $x_1 < -\frac{1}{2}, x_2 < -1$.
4. $x^2 - 5x + 8 = 0$ $D = 25 - 32 = -7 < 0$ <i>Оскільки $D < 0$, то рівняння не має коренів</i>	4. $x^2 - 5x + 8 > 0$, $D = 25 - 32 = -7 < 0$ <i>Оскільки $D < 0$, нерівність розв'язків не має</i>

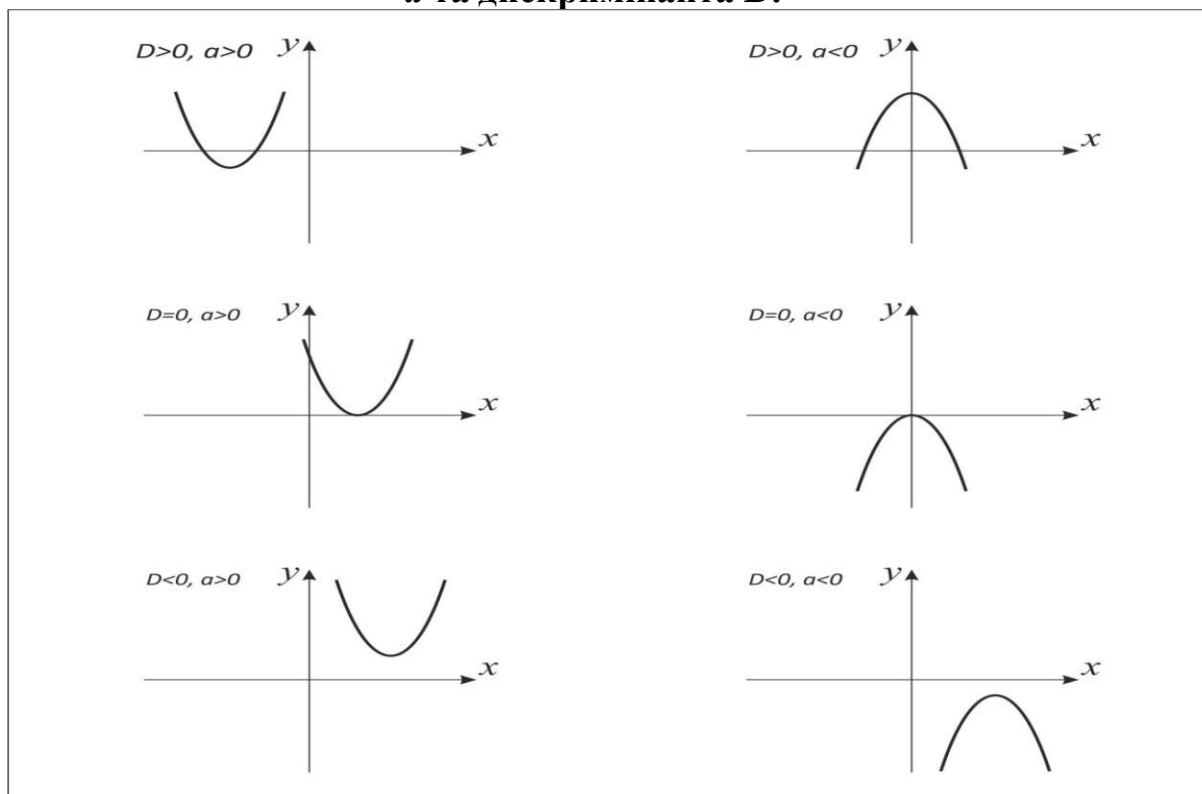
Враховуючи, що помилка $x^2 < 9, x < \pm 3$ є поширеною, вчителю необхідно **звернути увагу учнів на цю помилку**, розглянути з учнями правильне розв'язування нерівності, акцентувати увагу на тому, що це квадратна нерівність, тому спосіб її розв'язування буде таким, як спосіб розв'язування всіх квадратних нерівностей, згідно встановленого правила-орієнтира. Запобіганню такої помилки також сприяє звичка записувати розв'язок рівняння $x^2 = 9$, так:

$x_1 = 3, x_2 = -3$, а не так: $x = \pm 3$. У ході вивчення теми учні повинні навчитися розв'язувати нерівності виду: $ax^2 \leq b$; $ax^2 > bx$ та аналізувати одержані розв'язки.

Попередженню помилок внаслідок хибної аналогії сприяє робота з учнями по виявленню спільного і відмінного у квадратних рівняннях: $ax^2 + bx + c = 0$, де a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$, x – змінна, та квадратних нерівностях: $ax^2 + bx + c \geq 0$ ($ax^2 + bx + c > 0, ax^2 + bx + c \leq 0, ax^2 + bx + c < 0$) де a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$, x – змінна. Учні можна прилучити до написання повідомлень, наприклад, таких: «Роль квадратних рівнянь у розв'язуванні нерівностей», «Чи залежить множина розв'язків квадратної нерівності від розв'язків відповідного квадратного рівняння?» тощо та обговорення цих повідомлень. Часто учні неправильно розв'язують квадратні нерівності у випадку, коли дискримінант відповідного квадратного рівняння від'ємний. Тому вбачаємо за необхідне повторення властивостей квадратичної функції, зокрема, вигляд та розміщення параболи в залежності від знаку коефіцієнта a та дискримінанта D .

Таблиця 2.9

Залежність розміщення графіка функції $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ від значень a та дискримінанта D :



Також учні повинні пам'ятати:

Якщо рівняння коренів не має $\Rightarrow$ функція нулів не має $\Rightarrow$ графік функції не перетинає вісь абсцис

Якщо всі ці відомості постійно повторювати з учнями, тоді під час розв'язування нерівностей вони замислюються над кожною дією.

Оскільки в чинних підручниках більше уваги приділяється розв'язуванню нерівностей саме за допомогою схематичної побудови графіка квадратичної функції, а учні побоюються, що можуть зробити помилку, виконуючи побудову графіка, то розв'язування таких нерівностей супроводжується страхом припуститися помилки. Тому вже на початку вивчення теми варто донести до учнів, що точного графіка функції будувати не треба, а тільки схематично вказати його вигляд. Під час побудови схематичного графіка важливим є напрям «віток» параболи та нулі функції (якщо вони є).

У роботі з алгебраїчними помилками учнів ми надаємо особливого значення використанню мультимедійних та програмних засобів ІКТ. Значне місце відводиться створенню презентацій, як засобу наочності та мобільності.

Враховуючи закономірність мислення про те, що активність мисленнєвої діяльності в ході ознайомлення з навчальним матеріалом зростає, якщо учень, ознайомлюючись з ним, одночасно виконує певне конкретне завдання, що сприяє кращому його розумінню, познайомити учнів з розв'язуванням квадратних нерівностей можна так:

Запропонувати на презентації приклад розв'язування квадратної нерівності:
«Розв'яжемо нерівність $5x^2 + 9x - 2 < 0$.

Розглянемо функцію $y = 5x^2 + 9x - 2$. Графіком цієї функції є парабола, вітки якої направлені вгору. Розв'яжемо рівняння $5x^2 + 9x - 2 = 0$, $D = 121$, $x_1 = -2$, $x_2 = 0,2$. Отже, парабола перетинає вісь Ox в точках з абсцисами $x_1 = -2$, $x_2 = 0,2$. Зобразивши схематично цю параболу, знайдемо, що $y < 0$, якщо $x \in (-2; 0,2)$ Відповідь: $(-2; 0,2)$.

Потім запропонувати учням:

- прочитати запропонований зразок розв'язування нерівності;
- скласти алгоритм розв'язування схожих нерівностей.

Наступним кроком буде порівняння складених кожним учнем алгоритмів з тим, що на презентації:

1. Записати квадратичну функцію.
2. Визначити напрям віток параболи.
3. Обчислити дискримінант відповідного квадратного рівняння.
4. Знайти точки перетину параболи з віссю абсцис.
5. Зобразити схематично графік.
6. Записати множину значень x , які задовольняють нерівність.

Ще краще, коли в алгоритмі допускається неточність і учням пропонується знайти її. Так активізується мисленнєва діяльність учнів, що сприяє кращому засвоєнню навчального матеріалу. У даному випадку спрацьовує дидактичне правило: *спочатку вчитель ставить конкретне завдання, яке учні повинні виконати у процесі ознайомлення з матеріалом і тільки після осмислення ними поставленого завдання їм пропонується читати відповідний параграф підручника, слухати пояснення вчителя.*

Наступним кроком є складання учнями під керівництвом учителя узагальненого алгоритму.

Алгоритмічний припис розв'язування квадратної нерівності за допомогою графіка квадратичної функції (загальний):

1. Записати квадратичну функцію.
2. Обчислити дискримінант відповідного тричлена.
3. Якщо $D \geq 0$, знайти нулі квадратичної функції.
4. Якщо $D < 0$, графік не перетинає вісь Ox . Нулів немає.
5. Визначити напрям віток параболи.
6. Зобразити схематично графік.
7. Записати множину значень x , які задовольняють нерівність.
8. Зробити перевірку (підставити значення змінної з одержаного проміжку у вихідну нерівність).

У свідомості учнів повинен закарбуватися суттєвий зв'язок :

Квадратні рівняння $\leftrightarrow$ **квадратична функція** $\leftrightarrow$ **квадратні нерівності**.

Корені квадратного рівняння $\leftrightarrow$ **нулі функції** $\leftrightarrow$ **множина розв'язків квадратної нерівності**.

Примітка! Обов'язковим є внесення створеного алгоритму до особистого довідника учня.

Розвитку мислення, уваги, спостережливості, уміння аналізувати, спостерігати і робити висновки в превентивній діяльності протягом вивчення кожної змістової лінії ми надаємо особливого значення.

Розв'язати квадратну нерівність учні можуть і не будуючи графіки, а досліджуючи знак виразу $ax^2 + bx + c$ аналітично. Уміння аналізувати нерівності їм дуже знадобиться в старшій школі та під час складання ДПА і ЗНО.

Завдання можуть бути, наприклад, такими: розв'язати нерівності:
 $(2x + 6)^2 \geq 0$; $(x + 1)^2 \leq 0$; $(x - 2)^2 > 0$.

Зупинимось детальніше на логічних помилках учнів, яких вони можуть припуститися під час розв'язування квадратних нерівностей.

Завдання 1. Розв'яжіть нерівність: $(2x + 6)^2 \geq 0$.

Неправильне розв'язання:

$(2x + 6)^2 \geq 0$; $2x + 6 \geq 0$; $2x \geq -6$; $x \geq -3$. Відповідь: $[-3; \infty)$.

Правильне розв'язання: Нерівність $(2x + 6)^2 \geq 0$ виконується для всіх значень змінної x . Відповідь: $(-\infty; \infty)$.

Завдання 1. Розв'яжіть нерівність: $(x + 1)^2 \leq 0$.

Неправильне розв'язання: Нерівність $(x + 1)^2 \leq 0$ розв'язків немає.

Правильне розв'язання: Нерівність $(x + 1)^2 \leq 0$ виконується при $x = -1$.

Відповідь: $x = -1$.

Завдання 3. Розв'яжіть нерівність: $(x - 2)^2 > 0$.

Неправильне розв'язання: Нерівність: $(x - 2)^2 > 0$ виконується для всіх значень змінної x . Відповідь: $(-\infty; \infty)$.

Правильне розв'язання: Якщо $x = 2$, то $(x - 2)^2 = 0$, отже $x \neq 2$.

Відповідь: $(-\infty; 2) \cup (2; \infty)$.

Під час вивчення квадратних рівнянь для знаходження коренів, на нашу думку, варто надавати важливого значення використанню теореми, оберненої до теореми Вієта (в старшій школі на розв'язування показникових, логарифмічних та тригонометричних рівнянь, що зводяться до квадратних, які учні розв'язують через дискримінант, витрачається багато часу), а під час розв'язування квадратних нерівностей – методу інтервалів.

За чинною програмою в звичайних класах основної школи метод інтервалів вивчається лише в класах з поглибленим вивченням математики. Зокрема, в підручнику [2] метод інтервалів уводиться в рубриці «Дізнайтеся більше». Вивчається метод інтервалів у 10 класі. На нашу думку, метод інтервалів можна вивчати і в основній школі, як метод, який можливо використовувати і для розв'язування квадратних нерівностей, і для розв'язування дробово-раціональних нерівностей. Як відомо, розв'язування квадратних нерівностей в загальному вигляді: $ax^2 + bx + c > 0$ при $a \neq 0$ і $D > 0$ можна звести до розв'язування нерівностей виду: $a(x - x_1)(x - x_2) > 0$, розв'язки яких знаходяться методом інтервалів.

Уміння використовувати учнями запропонованих алгоритмічних приписів розвивають усне і писемне мовлення учнів на такому рівні, що вони швидко переходять до складніших умінь – самостійного складання нових алгоритмічних приписів чи правил-орієнтирів. Список вказівок разом із зразком відповіді, який показує вчитель, допомагає учням ґрунтовно пояснювати розв'язування задачі і не тільки самостійно виправляти помилки, але й запобігати їх. Тому в превентивній діяльності у процесі вивчення нерівностей ми значне місце відводимо *алгоритмічному методу навчання*. Важливе значення має спрямування

учнів учителем на запам'ятовування алгоритму. Це може бути така рекомендація учителя: «Читаючи та використовуючи алгоритм розв'язування нерівності, намагайтесь його запам'ятати!». Вимога та заохочення учителя викликають в учнів установку на міцне запам'ятовування алгоритму. Без такої установки формування умінь сповільнюється і значна кількість учнів довго не можуть запам'ятати алгоритм, плутаються під час пояснення розв'язування завдання.

Важливе значення має *пунктуальне дотримання* запропонованого учителем зразку розв'язування нерівності. Якщо послідовність міркувань, запропонована вчителем та алгоритмічним приписом, не дотримується, то формування проміжних асоціацій утруднюється і сповільнюється. Вони виникають і відразу «руйнуються», тому що в учня немає твердої лінії, міцного підґрунтя, що повторюється в цих міркуваннях. За таких умов учням складно проводити міркування і вони перестають до них прислухатися. У результаті виникає зв'язок: умова — розв'язок, але він утворюється без проміжних міркувань. І учням в подальшому складно пояснювати свої дії.

Дробово-раціональні нерівності. Багато помилок учні допускають в контрольних роботах під час розв'язування дробових нерівностей. Як свідчить аналіз цих помилок, вони з'являються у таких випадках:

– під час зведення вихідної нерівності до системи нерівностей або сукупності систем нерівностей;

Приклад. Розв'язати нерівність: $\frac{x+6}{x} > 0$.

Неправильне розв'язання: $\begin{cases} x+6 > 0, \\ x > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x > -6, \\ x > 0; \end{cases} \quad x > 0. \text{ Відповідь } (0; \infty).$

Причина помилки: під час вивчення теми: «Раціональні числа і дії над ними» не сформувалась правильна асоціація, що частка буде додатною в двох випадках, і як наслідок випав з розгляду випадок:

$\begin{cases} x+6 < 0, \\ x < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x < -6, \\ x < 0; \end{cases} \quad x < -6.$

– під час множення обох частин нерівності на знаменник, знак якого при значеннях змінної не визначений;

Приклад 1. Розв'язати нерівність $\frac{2x+3}{x-1} > 1$.

Неправильне розв'язання. $2x+3 > x-1$; $x > -4$. *Відповідь:* $(-4; \infty)$.

Помилка: множення обох частин нерівності на знаменник, який містить невідоме.

Причина: не сформовані уміння аналізувати нерівність та хибна аналогія з розв'язуванням нерівності вигляду: $\frac{2x+3}{5} > 1$

Приклад 2. Розв'язати нерівність $\frac{x^2+81}{4-x^2} > 0$.

Неправильне розв'язання: $x^2+81 > 0$ при $x \neq \pm 2$.

Відповідь: $(-\infty; -2) \cup (-2; 2) \cup (2; \infty)$.

Причина помилки: Невміння аналізувати дробово-раціональну нерівність (не враховано те, що $x^2+81 > 0$ і те, що дріб більший нуля, а отже, $4-x^2 > 0$, тому $x \in (-2; 2)$).

Проаналізувавши підручники з алгебри для 9 класу [2, 15, 113] та чинну програму з математики, ми не виявили окремої теми «Розв'язування дробово-раціональних нерівностей». Тому вважаємо, що значна кількість помилок, які допускають учні, пов'язана з відсутністю в підручниках чітких орієнтирів стосовно тих дій, які повинні бути виконані для правильного розв'язування таких нерівностей.

Розв'язування дробово-раціональних нерівностей з меншою кількістю помилок ми пов'язуємо із застосуванням методу інтервалів. Тому пропонуємо учнів 9 класу познайомити з цим методом. Враховуючи, що основним внутрішнім мотивом навчальної діяльності для більшості учнів 9 класу є орієнтація на результат, головним аспектом мотивації може бути аргументація вчителя, що знайомство з новим методом дозволить розв'язувати різноманітні нерівності не тільки в дев'ятому, а і в 10-му та 11-му класах.

Виділення орієнтовної основи діяльності розв'язування дробово-раціональних нерівностей методом інтервалів варто провести на прикладі коментованого розв'язування нескладної дробово-раціональної нерівності, наприклад, такої: $\frac{2x+1}{x-1} \geq 0$.

1. Розглянемо функцію: $f(x) = \frac{2x+4}{x-1}$.

2. Знайдемо область визначення функції: $x-1 \neq 0, x \neq 1$;

$$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; \infty).$$

3. Знайдемо нулі функції: $2x+4=0, x=-2$.

4. Позначимо область визначення та нуль функції на координатній прямій, дослідимо знак функції на кожному проміжку:



5. Запишемо відповідь, враховуючи знак нерівності.

$$\text{Відповідь: } (-\infty; -2] \cup (1; \infty).$$

Необхідно звернути увагу учнів на те, що метод інтервалів ґрунтується на тому, що неперервна на проміжку функція може змінювати знак тільки в тих точках, де її значення дорівнює нулю (але може і не змінювати).

До особистого довідника кожен учень має занотувати алгоритм застосування методу інтервалів:

Щоб розв'язати нерівність $\frac{R(x)}{K(x)} \triangleleft 0$, де « $\triangleleft$ » — один із знаків « $\leq$, $\geq$, $<$, $>$ »

необхідно дослідити функцію $f(x) = \frac{R(x)}{K(x)}$ на знакосталість:

- 1) знайти область визначення функції;
- 2) знайти нулі функції;
- 3) отриманими нулями розбити область визначення на проміжки;
- 4) визначити знак функції на кожному з проміжків, обчисливши значення функції в будь-якій точці цього проміжку;
- 5) об'єднати проміжки, на яких функція задовольняє нерівність, у множину розв'язків.

Враховуючи те, що в одних підручниках пропонується в першому пункті знаходити ОДЗ нерівності, в інших — область визначення функції, необхідно пояснити учням, що ОДЗ дробово-раціональної нерівності співпадає з областю визначення функції, що стоїть у лівій частині нерівності.

Після цього, з метою осмислення, провести поелементне коментоване розв'язування раціональної та дробово-раціональної нерівностей методом інтервалів. Наприклад, таких:

$$(x - 5)(3 - x) \geq 0 \quad \text{та} \quad \frac{(x - 3)(2x + 8)}{x - 2} < 0$$

Після розв'язання першої нерівності варто звернути увагу учнів на те, що у випадку нестрогої нерівності у відповідь, крім одержаних інтервалів, обов'язково повинні входити всі нулі функції $f(x)$ (Відповідь: $3 \leq x \leq 5$). Також необхідно звернути увагу учнів на те, що, розкривши дужки в цій нерівності, ми одержуємо квадратну нерівність. Отже, метод інтервалів дає ще один спосіб розв'язування квадратних нерівностей.

Для активізації пізнавальної діяльності школярів доцільно розглянути розв'язування одних і тих нерівностей різними методами.

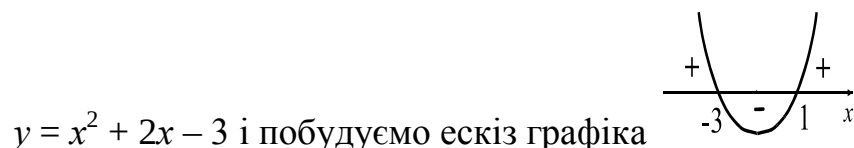
Наприклад, розв'язати нерівність $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2} \leq 0$.

1. Розв'язування нерівності методом рівносильних перетворень:

1). ОДЗ: $(x + 1)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -1$.

2). Оскільки $(x + 1)^2 > 0$, маємо $x^2 + 2x - 3 \leq 0$.

3) Щоб розв'язати одержану квадратну нерівність, знайдемо нулі функції



Розв'язок квадратної нерівності: $-3 \leq x \leq 1$.

Враховуючи ОДЗ, маємо відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$.

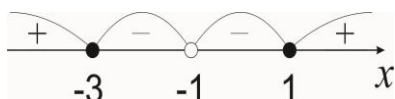
2. Розв'язання цієї ж нерівності методом інтервалів може бути таким:

Розглядаємо функцію: $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2}$.

1). $D(f) : (x+1)^2 \neq 0$, отже, $x \neq -1$.

2). Нулі: $f(x) = 0$, $\frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = 0$; $x^2 + 2x - 3 = 0$; $x_1 = -3$, $x_2 = 1$.

3). Отриманими нулями розбиваємо область визначення на проміжки:



Відповідь: $[-3; -1) \cup (-1; 1]$.

З метою попередження появи помилок учителю потрібно насамперед навчити учнів усвідомлено приступати до розв'язування нерівностей. Школярі повинні вміти аналізувати запропоновану нерівність, визначати вид нерівності, спосіб та метод її розв'язування, і обов'язково вміти здійснювати перевірку одержаного розв'язку.

Перевірку розв'язків систем рівнянь, нерівностей та систем нерівностей можна ефективно здійснювати графічним способом, використовуючи при цьому навчальні програмні засоби, зокрема GeoGebra, MathCad, GRAN1.

Нами розглянуто організацію превентивної діяльності під час вивчення нерівностей. Перейдемо до розгляду такої діяльності під час вивчення функцій.

2.3. Попередження, виявлення і виправлення помилок учнів під час вивчення змістової лінії «Функції і їх графіки»

Функціональна змістова лінія пронизує весь курс алгебри основної школи і розвивається у тісному зв'язку з тотожними перетвореннями, рівняннями та нерівностями. Властивості функцій, як правило, встановлюються за їх графіками, тобто на основі наочних уявлень, і лише деякі властивості обґрунтовуються аналітично. У міру оволодіння учнями теоретичним матеріалом кількість властивостей, що підлягають вивченню, поступово збільшується. Важливе місце відводиться формуванню умінь будувати й аналізувати графіки функцій,

характеризувати за графіками функцій процеси, які вони описують, спроможності розуміти функцію як певну математичну модель реального процесу.

За чинною програмою поняття функції вводиться у 7 класі. У цьому ж класі розглядається лінійна функція та її графік. Ці відомості використовуються для графічного ілюстрування розв'язування лінійного рівняння з однією змінною, а також системи двох лінійних рівнянь з двома змінними. Внаслідок вивчення теми учні мають безпомилково розв'язувати вправи, що передбачають:

- знаходження області визначення функції;
- знаходження значення функції за даним значенням аргументу;
- побудову графіка лінійної функції;
- знаходження за графіком функції значення функції за даним значенням аргументу і навпаки;
- визначення окремих характеристик функції за її графіком (додатні значення, від'ємні значення, нулі).

У 8 класі учні мають будувати графіки функцій $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ характеризувати властивості цих функцій за їх графіками.

У 9 класі розглядається квадратична функція. Вивчення її властивостей пов'язується, зокрема, з розв'язуванням квадратних нерівностей. За чинною програмою очікуваними результатами навчально-пізнавальної діяльності учнів є :
Учень/учениця:

- наводить приклади квадратичної функції;
- обчислює значення функції в точці;
- пояснює перетворення графіків функції: $f(x) \rightarrow f(x)+a$; $f(x) \rightarrow f(x+a)$;
- $f(x) \rightarrow kf(x)$, $f(x) \rightarrow -f(x)$; алгоритм побудови графіка квадратичної функції;
- характеризує функцію за її графіком;
- розв'язує вправи, що передбачають: побудову графіка квадратичної функції; розв'язування квадратних нерівностей.

Накопичений багаторічний досвід викладання показує, що в багатьох учнів побудова графіків функцій викликає великі труднощі. Ці труднощі значною

мірою пояснюються тим, що питання графічного зображення функцій у шкільному курсі алгебри розглядаються в різних розділах і вивчаються частинами, що звичайно, впливає на ґрунтовне засвоєння цього важливого матеріалу. Завдання вчителя – сформувати в учнів цілісне уявлення про функцію і навчити їх свідомо будувати графіки, оскільки школярі, як правило, заучують і запам'ятовують зовнішнє, формальне, символічне вираження функції, а самого факту, описаного формулою, не розуміють і графіки будують формально.

Так, наприклад, учні, побудувавши графік функції $y = \frac{1}{x}$, часто не спроможні побудувати графік функції, записаної рівняннями $xy = 1$ або $vt = 12$, тобто тієї самої функції, поданої в іншій формі.

Школярі часто не вміють будувати й читати графіки функцій, правильно встановлювати область визначення функції і множину значень, з'ясовувати питання, чи парна дана функція чи непарна, на якому проміжку вона зростає і на якому спадає, знаходити нулі функції.

Для свідомого засвоєння відомостей про функцію в курсі алгебри потрібно, починаючи з початкової школи, проводити функціональну пропедевтику, спрямовану на формування поняття функції, способів її задання, властивостей окремих видів функції. Так, розв'язуючи текстові задачі, потрібно звертати увагу учнів на *залежність* вартості товару від ціни, зміну результатів дій від зміни компонентів, *залежність* шляху від швидкості та часу, *залежність* площі прямокутника від довжини однієї зі сторін тощо, акцентувати увагу учнів на слові *залежність*.

Необхідно відзначити, що вже на початку вивчення поняття «функція» учні його засвоюють формально. Причиною є те, що вчителі, сформулювавши означення функції, не аналізують ключове слово «залежність», не наголошують на тому, що кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної.

З метою усвідомлення поняття «функція» доцільно спочатку зосередити увагу на заданні функції формулою, розглянувши кілька задач, що приводять до

поняття функціональних залежностей, наприклад, такі: купують олівці за ціною 2 гр. за один олівець, записати залежність між кількістю олівців x і їх загальною вартістю y ; записати залежність між довжиною ребра куба x і його об'ємом y ; автомобіль рухається рівномірно по прямолінійній ділянці довжиною 200 км, записати залежність між швидкістю автомобіля x км/год і часом y год, затраченим на проходження цієї ділянки.

Наступним етапом має бути обговорення прикладів залежностей, пропонованих самими учнями (в межах експерименту вони були такими: графік руху потягів, прогноз погоди на тиждень, список учнів у журналі, об'єм кімнати, залежність одягу, який одягають на прогулянку, залежно від температури повітря, залежність настрою від оцінки тощо).

Підсумком такої діяльності буде висновок: функція – це залежність однієї змінної від іншої. Важливо домогтися усвідомлення учнями того, що про функцію можна говорити лише тоді, коли кожному значенню незалежної змінної відповідає єдине значення залежної змінної. Усвідомленню цього факту сприяє наведення прикладів графічного зображення функцій та контрприкладів.

У даному випадку на допомогу приходять засоби ІКТ, які можна використовувати для візуалізації навчального матеріалу.

Завдання: як на вашу думку, чи є графіком функції лінія, зображена на кожному з рисунків: а), б), в), відповідь обґрунтуйте.

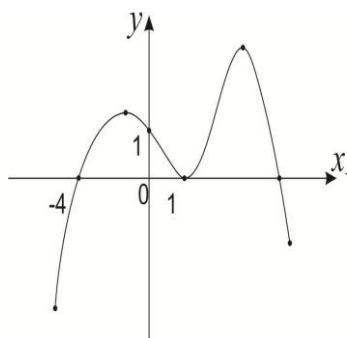


рис. а)

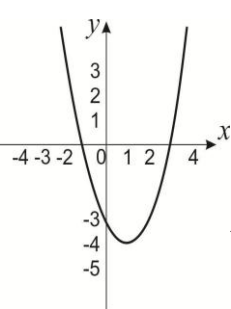


рис. б)

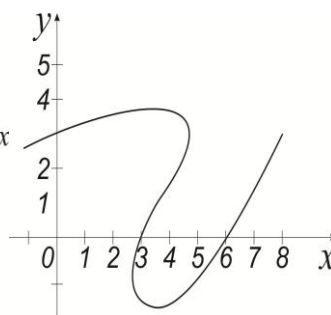


рис. в)

Наступним кроком є приклади та контрприклад графічного зображення функціональних залежностей, запропонованих самими учнями. Обговорення цих прикладів. Засобами заохочення є похвала, високий бал, створення ситуації успіху, зацікавлення.

Учні повинні чітко усвідомити, що таке функція, наводити приклади функції, будувати схематично графіки функцій. Це перший і дуже важливий етап у засвоєнні поняття функції. Наступним етапом є осмислення області визначення та області значень функції. Учитель має так організувати діяльність, щоб відбулося осмислене розуміння цих понять. Цьому сприяє такий факт: областю визначення функції є проєкція графіка функції на вісь Ox , а областю значень – на вісь Oy . «Візуалам», наприклад, зрозуміліше, якщо показати геометричну інтерпретацію та закріпити у процесі розв’язування вправ усно та письмово. Це можуть бути завдання з підручника та використання презентацій, виконання завдань з комп’ютерною підтримкою. Важливо, щоб учні могли виконувати і обернені завдання: зобразити схематично графік функції, область визначення якої задана. Ми надаємо особливого значення першим урокам вивчення функцій, засвоєнню та осмисленню учнями основних понять. Надаємо перевагу самостійній діяльності учнів під керівництвом учителя, формуванню вміння доводити та обґрунтовувати власну думку, співставляти та протиставляти, використовувати контрприклад, знаходити та виправляти власні помилки та помилки однокласників.

Якщо працювати з функціями заданими аналітично, необхідно, щоб учні запам’ятали, що для знаходження області визначення під час розв’язування задач варто брати до уваги те, яких числових значень може набувати аргумент за змістом задачі: якщо функцію задано формулою і область її визначення не зазначена, то область визначення складається з усіх значень аргументу, за яких вираз має зміст. Варто також закріпити ці відомості виконанням вправ. Наприклад:

1. У хлопчика було 30 грн. Він купив x зошитів по 2 грн. за один зошит. Позначивши кількість гривень, що залишились у хлопчика, буквою y , запишіть функціональну залежність між y і x . Яка область визначення цієї функції?

Записавши залежність $y = 30 - 2x$, встановлюємо, що за змістом задачі змінна x може набувати натуральних значень, не більших від 15 (якщо буде куплено 15 зошитів, хлопчик витратить усі гроші). Отже, в розглянутій задачі область

визначення функції складається з послідовних натуральних чисел від 1 до 15.

2. Функцію задано формулою $y = \frac{6}{x-3}$, ця формула не має змісту при $x = 3$.

Отже, область визначення функції $y = \frac{6}{x-3}$ складається з усіх чисел, крім числа 3.

3. Довжина сторони квадрата дорівнює x , а його площа $y = x^2$. Область визначення цієї функції складається з усіх додатних чисел.

Змістові лінії виразів та їх перетворень, рівнянь і нерівностей та функцій тісно переплітаються під час їх вивчення. Суттєвим спільним є те, що виконуючи перетворення, наприклад, дробово-раціональних виразів, учні повинні вміти знаходити допустимі значення змінних у цих виразах, під час розв'язування дробово-раціональних рівнянь та нерівностей школярі повинні показати вміння знаходити область допустимих значень змінних (ОДЗ), під час вивчення функцій необхідним є вміння знаходити область визначення функції. Часто учні плутають ці поняття внаслідок формального засвоєння, що є причиною появи помилок.

Кожна з цих операцій зводиться, по суті, до знаходження значень змінної, за яких вираз має зміст. Звичка аналізувати вираз, сформована вже під час вивчення перших тем алгебри, сприяє запобіганню помилок у процесі вивчення всіх вищеназваних змістових ліній.

Як показав констатувальний експеримент нашого дослідження, учні часто неправильно будують схематично графіки запропонованих функцій. Причиною таких помилок є формальне засвоєння загального виду функцій та їх графіків. Так, наприклад, типовою є помилка, коли, виконуючи завдання: побудувати графік функції $y = \frac{x}{4}$, учні будують $y = \frac{4}{x}$. Причиною таких помилок є зовнішня схожість запропонованих функцій: вираз, записаний у вигляді дроби, число 4, змінна x . Помилкова асоціація сформована під час вивчення лінійної функції призводить до неправильного виконання завдання.

Щоб попередити помилки у побудові графіків функцій під час їх вивчення та у майбутньому, учні мають засвоїти *алгоритм побудови* графіка функції, що вивчається, скласти блок-схему, в яку бажано включити останнім таким пункт:

вибрати декілька точок на графіку і перевірити, чи задовольняють їх координати рівняння функції та занотувати її у особистий довідник.

Причиною появи помилок також є невміння учнів читати графіки функцій, виявляти властивості функцій за їх графіками. Проаналізуємо причини появи таких помилок і визначимо прийоми їх попередження.

Лінійна функція. Одна з причин появи помилок при вивченні цієї теми – поспішна вказівка вчителя: «Щоб побудувати графік функції $y = kx + b$, достатньо побудувати дві точки графіка, а потім за допомогою лінійки через ці точки провести пряму». Такий висновок повинен зробити не вчитель, а учні після пояснення вчителя і самостійно побудованих графіків виду $y = kx + b$, тобто коли вони самі зможуть помітити, що точки, координати яких задовольняють рівність

$y = kx + b$, лежать на одній прямій. Варто зазначити, що в процесі побудови графіків функцій виду $y = kx + b$ учні повинні помітити – коли x змінюється рівномірно, тобто на одне й те саме число, то й y змінюється також рівномірно, як ведуть себе графіки функцій $y = kx + b$ в залежності від знаку k та значень b .

Буває й так, що учням, навіть тим, які вміють побудувати графік лінійної функції, важко написати рівняння бісектриси першого і третього координатних кутів. Якщо поставити завдання – знайти множину точок, абсциса яких дорівнює нулю ($x = 0$), то учні показують точку $(0; 0)$ або вісь Ox замість осі Oy , аналогічно з віссю Ox . Щоб запобігти таких помилок, потрібно пояснення вчителя за схемою «роби так, як я» замінити діалогами за схемою «учитель – учень – учитель». Бесіда повинна мати евристичний характер. Запитання вчителя мають виконувати розвивальні функції, щоб активізувати розумову діяльність і мислення учнів.

Зупинимось на вправах, розв'язування яких може бути методичним прийомом попередження помилок під час побудови графіків і визначення властивостей функції ще на ранньому періоді їх вивчення.

Наприклад, на уроці на тему «*Координатна площина*» поряд з вправами на знаходження положення точки за її координатами і координат точки за їх положенням на площині доцільно запропонувати такі:

1. Де розміщені точки, що мають координати $(0; 0)$, $(0; 1)$, $(0; 2)$, $(0; -2)$, $(0; -3)$?

2. У яких точках на координатній площині абсциса дорівнює 3; 2; 1; 0?
3. У яких точках на координатній площині ордината дорівнює 2; 1; 0; -1?
4. Знайдіть координати точок перетину прямої, проведеної на площині, з осями координат.
5. На даній прямій знайдіть точку, абсциса якої дорівнює -2.
6. Дано точку $A(5; -2)$. Побудуйте точку з протилежними координатами.
7. У яких точках на координатній площині абсциса дорівнює ординаті?
8. У яких точках на координатній площині абсциса в два рази більша за ординату; у два рази менша від ординати?
9. У яких точках на координатній площині абсциса і ордината протилежні?
10. Покажіть на координатній площині точки, по яких «автомобіль» може проїхати найкоротшим шляхом від точки $A(-2; 2)$ до точки $B(2; 2)$, а потім до точки $C(5; 4)$.
11. Точка $M(x; b)$ лежить у другій чверті. Знайдіть точку $K\left(|x|, \frac{b}{b}\right)$.

Подані вправи спрямовані на розвиток логічного мислення, формування в учнів стійких уявлень про властивості функції виду $y = kx + b$, хоча справжнього вигляду її на цьому етапі навчання вони ще не знають.

Щоб попередити хибну аналогію між функціями $y = k \cdot x$ та $y = \frac{k}{x}$ вже під час вивчення прямої пропорційності $y = kx$, потрібно сформулювати правильну асоціацію, звернувши увагу на те, що k може бути будь-яким числом. Допоможуть, наприклад, такі вправи:

1. Записати у вигляді дробу добуток: а) $\frac{1}{3} \cdot x$; б) $\frac{1}{2} \cdot x$; в) $\frac{1}{4}x$; г) $-\frac{2}{3}x$; д) $\frac{1}{12}x$.
2. Записати у вигляді добутку дріб: а) $\frac{x}{3}$; б) $\frac{x}{4}$; в) $-\frac{2x}{3}$; г) $\frac{x}{6}$; д) $-\frac{x}{3}$.
3. Знайдіть, чому дорівнює коефіцієнт k у функціях:

а) $y = 5x$; б) $y = 2x + 1$; в) $y = 0$; г) $y = \frac{x}{3} + 2$; д) $y = -\frac{x}{2} + 3$.

Методичним засобом, який буде сприяти кращому запам'ятовуванню, є гра-

змагання. До завдань гри доцільно додати завдання «знайди помилку», «чи правильно, що...». Як відомо, значну кількість помилок учні допускають внаслідок несформованих умінь виявляти властивості функцій. Тому вже під час вивчення лінійної функції варто вчити учнів досліджувати властивості заданої функції за побудованим графіком.

Поступове «нарощення» властивостей функцій під час вивчення їх конкретних видів допоможе учням краще усвідомити їх і самостійно встановлювати наявність чи відсутність уже вивчених властивостей у нових класів функцій.

Розглянемо на прикладі функції $y = 2x + 1$ побудову графіка та встановлення властивостей заданої функції.

1. Знайти область визначення функції. *Відповідь:* $D(y) = \mathbb{R}$.
2. Побудувати графік функції.

Враховуючи те, що через дві точки завжди можна провести пряму, навіть, якщо координати однієї з них знайдено неправильно, пропонуємо знаходити координати трьох точок: позначити дві точки на координатній площині і провести через них пряму та перевірити належність третьої точки побудованому графіку. Це можуть бути точки з такими координатами: $(0;1)$, $(1;3)$, $(-1;-1)$.

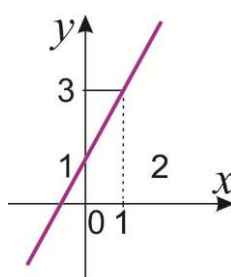


рис. 2.1

3. Знайти область значень функції: *Відповідь:* $E(y) = \mathbb{R}$.
4. Знайти нулі функції (значення x , за якого $y = 0$; точка перетину з віссю Ox). $0 = 2x + 1$, $2x + 1 = 0$, $2x = -1$, $x = -\frac{1}{2}$. $y = 0$, якщо $x = -\frac{1}{2}$.

Відповідь: $(-\frac{1}{2}; 0)$.

5. Знайти точку перетину з віссю Oy (значення y , якщо $x = 0$).

$y = 2x + 1 = 2 \cdot 0 + 1 = 1$. Якщо $x = 0$, то $y = 1$. Відповідь: $(0; 1)$.

6. Знайти, для яких значень x , а) $y > 0$; б) $y < 0$ (для яких значень x графік вище осі абсцис і для яких значень x графік нижче осі абсцис).

Відповідь: а) $y > 0$, якщо $x > -\frac{1}{2}$; б) $y < 0$, якщо $x < -\frac{1}{2}$.

7. Визначити: функція зростає чи спадає.

Відповідь: Оскільки коефіцієнт $k > 0$, то лінійна функція зростає.

Перше таке завдання учні виконують разом із учителем, наступні – самостійно. Запам'ятовування, усвідомлення та закріплення властивостей функцій вже на перших уроках варто мотивувати. Виконану правильно самостійну роботу, аналогічну розглянутій вище, учитель може оцінити найвищим балом. Учні мають відчуття, як важливо для вчителя засвоєння ними знань.

Практичний досвід викладання показує, що учні, знаючи, як побудувати графік функції $y = kx + b$, часто розгублюються, якщо потрібно побудувати графіки функцій: $y = b$ чи $x = b$ (де b – довільне число). Тому вчителю, вже на початку вивчення теми, необхідно звернути увагу учнів на ці функції та їх графіки. Запам'ятати допоможе правило-орієнтир:

*якщо $y = b$, то пряма паралельна осі x ;
якщо $x = b$, то пряма паралельна осі y .*

Вчителю варто також відпрацювати з учнями різні випадки розміщення графіків лінійних функцій залежно від коефіцієнтів: а) паралельність, б) перетин. Такі знання будуть актуальними під час розв'язування систем лінійних рівнянь. За загальним виглядом функцій учні зможуть визначати розміщення графіків цих функцій, а розуміючи залежність розв'язків системи від розміщення графіків зможуть здійснювати перевірку одержаних результатів.

Одним із прийомів закріплення знань з теми «Лінійна функція» є вдало дібрані завдання до проведення фізкультхвилинки, що сприяє і запам'ятовуванню,

і осмисленню навчального матеріалу. Фізкультхвилинку можна провести, наприклад, так, застосовуючи при цьому засоби ІКТ.

Вчитель пропонує ряд лінійних функцій:

- 1) $y = 3x + 4$; 2) $y = -5x + 1$; 3) $y = 2x + 2$; 4) $y = -6x + 4$;
 5) $y = 3x + 2$; 6) $y = 3x + 4$; 7) $y = -2x + 4$; 8) $y = 2$; 9) $x = 5$;
 10) $y = -2x - 3$; 11) $y = -2$; 12) $y = 0$; 13) $x = 0$; 14) $y = 2x$.

Якщо вчитель вказує на зростаючу функцію, учні підіймають вгору праву руку, ліву опускають вниз, утворюючи кут між рукою і тулубом. Якщо спадну – навпаки. Якщо пряма паралельна осі x – руки розгорнуті в сторони, паралельна осі y – одна піднята вертикально вгору, інша – опущена вниз. Якщо вчитель вибирає паралельні прямі – руки паралельно перед собою, якщо прямі, які перетинаються – витягнуті руки схрещуються. Якщо показує на пряму пропорційність – учні плещуть в долоні. Таких завдань можна пропонувати досить багато. Результат відчутний.

Обернена пропорційність. Для успішного засвоєння оберненої пропорційності вчителю доцільно актуалізувати набуті знання учнів з теми «Лінійна функція».

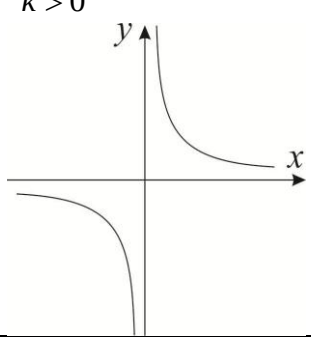
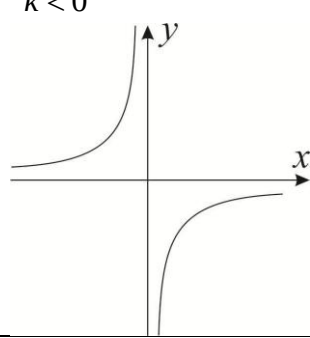
За результатами наших досліджень можемо стверджувати, що обернена пропорційність не викликає особливих труднощів у сприйманні та засвоєнні, в силу незвичного вигляду і зацікавлення учнів. У процесі вивчення теми розвивається логічне мислення, уява та уявлення, подальшого розвитку набувають прийоми розумової діяльності: аналіз, синтез, вміння порівнювати, узагальнювати та робити висновки. Щоб учні глибоко розуміли вказану тему, вчителю необхідно відчувати «складні» місця і зосередити на них увагу.

Типовою помилкою у побудові графіка оберненої пропорційності є те, що учні на перших уроках можуть будувати криві, дотикаючи їх до осей координат, внаслідок формального сприйняття області визначення та області значень даної функції. Завдання вчителя: актуалізувати попередні знання про функції та організувати діяльність учнів, так, щоб відбулося осмислене сприйняття функції

$y = k / x$, де x – аргумент, k – відмінне від нуля число, та її властивостей. Звернути увагу учнів на те, що жодну з осей координат графік функції не перетинає, в силу того, що x ніколи не може дорівнювати нулю (на нуль ділити не можна), а отже $y = 0$ ми теж ніколи не одержимо. Вивчення оберненої пропорційності сприяє поглибленню та закріпленню поняття функції та її властивостей. Вже на вищому, як під час вивчення лінійної функції, рівні, учні розглядають властивості функції, читають графіки. Проте, якщо вчитель не приділяє належної уваги алгоритму дослідження функції, то це залишається для учнів проблемною зоною надовго. Такі учні не знають, що таке нулі функції та як їх знаходити. Отже, з перших уроків, під час перших побудов графіків доцільно учням разом із вчителем скласти алгоритмічний припис дослідження функції $y = k / x$, розглянути випадки, коли $k > 0$ та $k < 0$, засвоїти цей алгоритм у процесі виконання вправ на його застосування та закріпити взаємоопитуванням. У ході вивчення теми ефективною є карта знань, яку учні створюють з допомогою вчителя та занотовують у власний довідник.

Таблиця 2.10

Графік та властивості функції $y = k / x$, де $k \neq 0$.

Графік функції	$k > 0$ 	$k < 0$ 
Область визначення функції: D(y)	Усі дійсні числа, крім 0	Усі дійсні числа, крім 0
Область значення функції: E(y)	Усі дійсні числа, крім 0	Усі дійсні числа, крім 0
Координатні чверті, у яких лежить графік	I і III	II і IV
Монотонність	Спадає на кожному із проміжків області визначення	Зростає на кожному із проміжків області визначення
Графік функції	Дві вітки гіперболи	

Під час виконання вправ необхідно також звернути увагу на формування вміння будувати графіки з вилученими точками.

Завдання. Побудуйте графік функції: $y = \frac{8 - 2x^2}{x^3 - 4x}$.

Розв'язання. Областю визначення функції будуть усі значення аргументу, що задовольняють умову $x^3 - 4x \neq 0$, тобто всі дійсні числа, крім 0, -2 і 2.

Задана функція після скорочення дробу набуває вигляду:

$$y = \frac{8 - 2x^2}{x^3 - 4x} = \frac{2(4 - x^2)}{-x(4 - x^2)} = -\frac{2}{x}. \text{ Графіком є:}$$

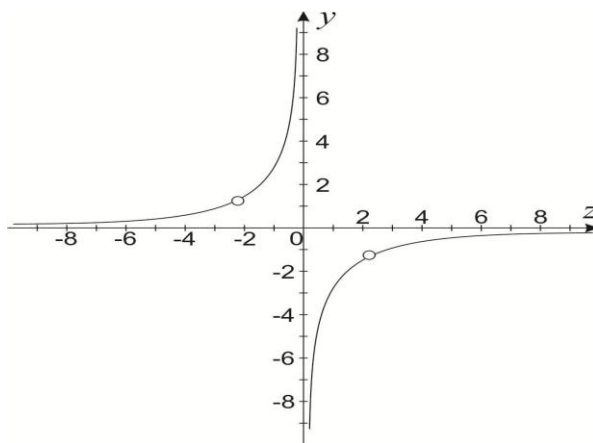


рис. 2.2

Досить часто учні під час побудови графіків функцій забувають вилучати точки, в яких функція не визначена. Щоб попередити такі помилки, вчителю доцільно показати виконання таких побудов та проконтролювати засвоєння школярами під час виконання самостійної роботи. Кращому засвоєнню властивостей функцій сприяє розв'язування рівнянь графічним способом. Правильність побудови графіків можна перевірити за допомогою комп'ютерних програм, таких як MathCad, GRAN 1, Advanced Grapher, GeoGebra.

Квадратична функція. Враховуючи те, що квадратична функція є важливим компонентом у розв'язуванні квадратних нерівностей та нерівностей, що зводяться до квадратних, щоб запобігти інтерференції знань (плутання побудови графіка із схематичною побудовою в ході розв'язування нерівностей), вивченню функції $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ та їх властивостей учитель має приділити належну

увагу.

Як свідчить аналіз контрольних робіт учнів та результати ДПА останніх років, помилки учні допускають під час: знаходження координат вершини параболи; визначення напрямку віток параболи; використання властивостей функції; зображення нулів функції та знаходження нулів функції за графіком. Школярі також не вміють виконувати симетрію графіка відносно прямої $x = x_0$. Причину ми також вбачаємо у низькому рівні засвоєння теми «Геометричні перетворення» з курсу геометрії.

Щоб попередити появу вищезгаданих помилок та підготувати необхідну основу для безпомилкового розв'язування квадратних нерівностей, доцільно зосередити увагу на алгоритмічних приписах побудови графіка квадратичної функції та розкритті властивостей даної функції за побудованим графіком. Значне місце в засвоєнні займають коментовані виконання завдань з використанням наочності, короточасні навчальні самостійні роботи з обґрунтуванням правильності виконання завдання. Важливо, щоб учні вміли перевірити свої дії. Підставляючи вибране значення аргументу у формулу, знаходили відповідне значення функції та переконувалися, що знайдена точка належить графіку.

На рівні 9 класу учні повинні вміти самі, з незначною корекцією вчителя за необхідності, складати таблиці властивостей функцій, створювати карти знань з теми, яка вивчається. Щоб попередити помилки, які виникають під час розв'язування квадратних нерівностей, необхідно звернути увагу учнів на знаходження проміжків на яких $y \leq 0$ або $y \geq 0$.

Приклад (коментоване виконання завдання). Побудуйте графік функції $y = x^2 - 2x - 3$. Вкажіть властивості цієї функції за схемою:

1) область визначення функції; 2) область значення функції; 3) точки перетину функції з осями координат; 4) проміжки зростання і спадання функції; 5) найбільше і найменше значення функції.

Розв'язання. Побудова графіка функції:

1. Визначаємо напрямки віток параболи: $y = x^2 - 2x - 3$, $a = 1$, $b = -2$, $c = -3$.

Так, як $a=1>0$, вітки параболи направлені вгору.

2. Знаходимо нулі функції (координати точок перетину графіка з віссю абсцис: у рівняння функції замість y підставляємо 0. Розв'яжемо рівняння $x^2 - 2x - 3 = 0$, $x_1 = -1$, $x_2 = 3$. Отже, маємо дві точки перетину з віссю Ox , а саме:

$(-1; 0)$, $(3; 0)$.

3. Знаходимо координати точок перетину графіка функції з віссю ординат (у рівняння функції замість x підставляємо 0 і одержуємо $y = 0^2 - 2 \cdot 0 - 3$). Точки перетину графіка з віссю Oy : $(0; -3)$.

4. Знаходимо координати вершини параболи:

$$x_0 = \frac{-b}{2a}, x_0 = \frac{2}{2} = 1; y_0 = 1^2 - 2 \cdot 1 - 3 = -4; (1; -4).$$

5. Враховуємо, що графік квадратичної функції симетричний відносно прямої $x = x_0$, $x = 1$.

6. Задаємо ще декілька точок: $(2; -3)$, $(4; 5)$. Знаходимо їм симетричні відносно прямої $x=1$. Будуємо графік.

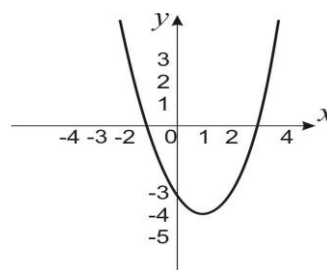


рис.2.3

Властивості функції $y = x^2 - 2x - 3$.

1. $D(y) = R$.

2. Точки перетину з віссю Ox : $(-1; 0)$, $(3; 0)$.

3. Точки перетину з віссю Oy : $(0; -3)$.

4. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень: $y > 0$ на проміжках $(-\infty; -1)$, $(3; \infty)$.

5. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень:

$y < 0$ на проміжку $(-1; 3)$.

6. Функція зростає на проміжку $x \in [1; \infty)$ функція спадає на проміжку $x \in (-\infty; 1]$.

7. Найменшого значення $y = -4$ функція набуває при $x = 1$. Найбільшого значення не існує.

8. Область значень функції $y \in [-4; \infty)$.

З метою запобігання помилок учнів під час розв'язування квадратних нерівностей варто показати поряд з побудовою графіка квадратичної функції, схематичне зображення графіка та вказати орієнтовну основу дій цього зображення. Тобто, зосередити увагу учнів на тому, які етапи є важливими під час побудови схематичного зображення графіка, який буде допоміжним під час розв'язування *квадратних нерівностей*. Що спільного і відмінного у цих двох побудовах. Після ознайомлення із матеріалом запропонувати учням скласти порівняльну карту знань (Додаток Р).

Необхідно враховувати те, що квадратична функція є останньою у вивченні змістової лінії «Функція», в основній школі, тому доцільно на кожному уроці здійснювати узагальнення і систематизацію функціонального навчального матеріалу з метою повторення, ліквідації прогалин у знаннях та забезпечення успішного складання ДПА в 9 класі. Разом з тим, успішне засвоєння загального виду графіка та властивостей квадратичної функції буде належним підґрунтям для глибокого розуміння та засвоєння теми «Квадратні нерівності».

Узагальнення проходить ефективно, якщо учні у процесі діяльності розв'язують рівняння та нерівності графічним способом.

В даному параграфі ми розглянули організацію превентивної діяльності вчителя математики під час вивчення змістової лінії : функції.

Результати нашого дослідження показали, що помилок учнів під час вивчення математики стає значно менше, якщо у вчителя сформований мотив, потреба та здатність в організації превентивної діяльності з попередження появи цих помилок. Методика проведення превентивної діяльності за змістовими лініями: вирази та перетворення виразів, рівняння і нерівності, функції яка реалізована в нашому дослідженні дала свій позитивний результат.

2.4. Інформаційно-комунікаційні технології як засіб коригування знань учнів з алгебри

Стрімкий розвиток інформаційних технологій, крім помітного зниження часових і просторових бар'єрів у поширенні даних, відкрив нові перспективи у сфері освіти. Можна констатувати появу принципово нових методів навчання на основі інтеграції освітніх та інформаційних технологій. Ці тенденції зумовили активізацію роботи вчителів математики з впровадження інформаційних технологій у традиційну модель навчального процесу. Завдяки опануванню сучасних інформаційних технологій вчителями математики зросла кількість уроків алгебри, орієнтованих на використання комп'ютера. Це розширило межі творчої діяльності як учителя, так і учня, сприяло розширенню самостійної дослідницько-пошукової діяльності, розвитку навичок критичного мислення школярів, підвищило мотивацію всіх учасників навчально-виховного процесу. Систематичне і цілеспрямоване використання інформаційних технологій (ІТ) у процесі навчання математики створює необхідні умови для інтенсифікації пізнавальної діяльності та гуманізації навчального процесу, інтеграції навчальних предметів, диференціації навчання, сприяє наданню навчальній діяльності дослідницького, творчого характеру, розкриттю творчого потенціалу вчителя й учнів, підвищує рівень математичної та інформаційної культури учнів. ІТ навчання із врахуванням системи психолого-дидактичних і методико-психологічних закономірностей розкриває широкі перспективи активізації і розвитку розумової діяльності учнів, створює сприятливі умови для роботи з помилками учнів.

Якщо на початковому етапі в шкільній освіті переважав аспект використання комп'ютера як об'єкта вивчення (комп'ютерна грамотність, основи інформатики та обчислювальної техніки), то зараз акценти зміщуються. На перший план виступають проблеми використання комп'ютера як засобу комунікації і навчання. Цей процес вимагає активізації психолого-педагогічних досліджень, які повинні виявити ефективність різних моделей навчання з використанням нових інформаційних технологій.

В цілому, досвід роботи вчителів математики багатьох шкіл, які використовують інформаційно-комунікаційні технології у навчанні, показує, що

комп'ютер у школі може надати істотну підтримку вчителю в організації навчального процесу, підвищити якість та ефективність навчальних методик, реалізувати індивідуальний підхід до кожного учня, стимулювати пізнавальну активність сучасних школярів. Причому саме вчителем визначається методика подання навчального матеріалу, закріплення і контролю знань, конкретний зміст, методи, засоби й організаційні форми навчання. Вчитель розподіляє співвідношення між обсягом самостійної роботи учнів і роботи разом із вчителем, між індивідуальними і колективними формами роботи. При цьому враховуються як уподобання самого вчителя, так і специфіка умов, в яких перебігає навчальний процес, індивідуальні особливості учнів і класного колективу.

Завдяки перевагам подання графічних та інших даних засобами інформаційно-комунікаційних технологій закладаються істотні передумови успіхів у навчанні: емоційне включення, емоційне сприйняття даних. Принцип наочності за умови використання програмних засобів полягає не стільки в можливості пасивного споглядання учнями моделей, як в активній перетворювальній діяльності, в процесі якої школярі самостійно будують моделі. Якщо електронні засоби дозволятимуть школярам добудовувати чи видозмінювати моделі, тоді можна очікувати на значне підвищення ефективності навчання. Адже аналізуючи динамічні моделі, встановлюючи суттєві зв'язки між їх складовими, виділяючи певні ознаки, школярі формуватимуть прийоми мисленнєвої діяльності.

Коригування знань, як правило відбувається в процесі їх формування. Прийоми виявлення помилок та недоліків і прийоми їх виправлення у навчальному процесі мають бути у єдності, утворюючи певний прийом.

Якщо помилки та недоліки у знаннях учня під час вивчення математики в загальноосвітній школі вже закріпилися, то для їх усунення необхідні надзвичайні зусилля як з боку вчителя, так і самого учня, тому важливою є робота щодо попередження помилок та недоліків у знаннях учнів. Коригування знань учнів, суть якого полягає в ілюстрації помилки чи недоліку за допомогою малюнків, формул, графічно-символічних комплексів, що подаються для зорового

сприймання після оголошення помилкової відповіді, дозволяє практично миттєво зіставляти неправильні відповіді з правильними та показати незаперечний доказ наявності помилки чи недоліку у відповіді школяра. Завдяки використанню спеціальних програм стало можливим здійснення оперативної корекції знань учнів з алгебри. Так, в підручнику з алгебри для 8 класу [204] пропонується для побудови графіків функцій та їх дослідження використовувати програму Advanced Grapher. Використання комп'ютерних програм для побудови графіків функцій дозволяє скоротити час на створення кількох систем координат в зошиті і уникати помилок під час побудови відповідних графіків. Причому, як додаткові дослідницькі завдання, учням пропонується побудова і дослідження графіків функцій, які вони будуть вивчати в наступних класах. Використання такого методичного прийому є хорошою пропедевтикою вивчення відповідного навчального матеріалу, сприяє попередженню помилок.

Використання технічних засобів сприяє поділу навчального матеріалу на невеликі сегменти з поточною перевіркою їх засвоєння. Одним із засобів візуалізації математичної задачі та її розв'язку, який робить діалог учня та вчителя більш доступним та евристичним, є педагогічний програмний засіб GRAN [95, 96, 201]. Завдяки його застосуванню можна здійснювати навчання алгебри і коригування набутих знань одночасно. В посібниках для вчителя, які є складовою програмно-методичного комплексу GRAN, наведена значна кількість математичних прикладів, що унаочнюють графічні зображення задач і вправ для самостійного виконання, питання для самоконтролю. Програма GRAN має багатий набір інструментів для роботи з функціями та їх графіками. Функціональні можливості, методичний супровід та простота освоєння програми дозволяє її успішно використовувати під час вивчення математики. В організації та проведенні роботи над помилками учнів під час вивчення деяких тем з алгебри в основній школі раціонально використовувати ППЗ GRAN 1 [201]. Оскільки виконані завдання в зошиті можна відразу перевірити із виконаними завданнями на моніторі комп'ютера. Це стосується графічних способів перевірки аналітично розв'язаних завдань, зокрема розв'язування систем рівнянь та нерівностей. Так,

наприклад, під час вивчення в 9 класі квадратичної функції, найбільше труднощів виникає в учнів під час побудови та перетворення графіків. Візуалізація виконання завдань та здійснення миттєвої перевірки виконаних побудов, дозволить ліквідувати прогалини в знаннях ще на етапі їх формування.

Під час вивчення алгебри в основній школі, в здійсненні контролю з комп'ютерною підтримкою реально використовувати тестові завдання навчального характеру, за допомогою яких учень та вчитель мають змогу з'ясувати рівень засвоєння навчального матеріалу своєчасно, адже, результати перевірки можна отримати одразу після проходження тесту, в разі необхідності проаналізувати помилки, провести корегувальні заходи, таким програмним засобом є MyTest. Нині існує велика кількість програм для підтримки організації тестового контролю знань, а також набори тестових завдань, наприклад, безкоштовний Інтернет-сервіс для створення тестів Майстер-тест. За допомогою даного сервісу можна створити самостійно набір тестових завдань з алгебри або скористатися бібліотекою вже наявних.

Помилки та недоліки під час виконання завдань з алгебри вимагають від учителя кваліфікованого пояснення та наведення конкретних прикладів, які б демонстрували учням відмінність правильного і неправильного виконання цих завдань, тому вдале та своєчасне застосування ІКТ значно полегшує корегувальні дії. Поділяємо погляди науковців [95, 96, 97, 131, 147, 201], які, розглядаючи умови використання комп'ютерно-орієнтованих систем навчання, зазначають, що процес навчання потрібно організовувати та здійснювати відповідно до принципів навчання.

З метою вдосконалення існуючих програмних засобів з математики на замовлення Міністерства освіти і науки України в Херсонському державному університеті створено програмно-методичний комплекс ТерМ. Основне призначення ТерМ-комп'ютерна підтримка практичних занять з алгебри у 7-9 класах, активної математичної діяльності учня. Використовуючи ТерМ, можна вдало організувати роботу з попередження та недопущення математичних помилок учнів під вивчення алгебри в основній школі, оскільки більшість

параграфів навчальних посібників програми містить перелік вправ для контролю виконання завдань, використання прийому самоперевірки. Учень постійно може мати зворотний зв'язок про правильність виконання роботи. З огляду на практичне застосування програмно-методичного комплексу ТерМ в роботі над помилками надзвичайно важливим є використання режиму покрокової перевірки розв'язання того чи іншого завдання шкільного курсу алгебри, що надає можливість як вчителю, так і учню своєчасно організувати та здійснити виправлення помилок, ліквідувати прогалини в знаннях.

Використання інформаційно-комунікаційних технологій дозволяє якісно здійснювати контроль за діяльністю учнів. Так, використання програми, розробленої О. І. Скафою [226] та призначеної для автоматизованого рецензування розв'язування математичних задач допоможе вчителю в організації та керівництві самостійною діяльністю учнів; здійсненні корекції роботи учнів на основі індивідуальних рекомендацій та завдань.

Значну роль у роботі з попередження появи помилок учнів з алгебри відіграє вдаль і своєчасне використання презентацій створених за допомогою Microsoft PowerPoint та програмних засобів для створення карт знань, зокрема: FreeMind, MindManager.

2.4. Організація та результати педагогічного експерименту

Основні положення дисертаційного дослідження перевірялись експериментально протягом 2009 – 2018 рр. у три етапи. Основною метою педагогічного експерименту була перевірка ефективності вибраного нами підходу до дослідження математичних помилок учнів та розробленої методики здійснення превентивної діяльності, організованої учителем математики у процесі навчання алгебри в основній школі.

На першому етапі (2009-2011рр.) проводився *констатувальний* експеримент, метою якого було вивчити стан проблеми запобігання та виправлення математичних помилок учнів, визначити її актуальність та шляхи вирішення. Для

досягнення поставленої мети нами були визначені наступні завдання:

- вивчити науково-методичну та психолого-педагогічну літературу з проблеми попередження, причин появи та виправлення математичних помилок учнів;
- виявити як систематично вчителі математики проводять необхідну роботу з математичними помилками учнів 7-9 класів та які прийоми використовують;
- визначити найбільш поширені, типові алгебраїчні помилки учнів;
- з'ясувати необхідність створення методики попередження появи помилок учнів у процесі вивчення алгебри.

На даному етапі робота здійснювалась у двох напрямках: 1) теоретичний аналіз психолого-педагогічної літератури з проблеми попередження та виправлення математичних помилок учнів; 2) практичне дослідження, спрямоване на з'ясування реального стану проблеми математичних помилок учнів загальноосвітніх шкіл.

На першому напрямі дослідження здійснювався теоретичний аналіз психолого-педагогічної літератури, нормативних документів з питань математичних помилок учнів. Це дозволило нам визначити методологічні та психолого-педагогічні основи організації превентивної діяльності вчителя математики.

В межах проведення дослідження щодо стану проблеми в практиці навчання ми проводили педагогічні спостереження в ході проходження педагогічної практики студентами УДПУ імені Павла Тичини, проводили бесіди з учителями та здійснювали анкетування та тестування серед учителів математики Черкаської, Одеської та Кіровоградської областей, систематизували власний досвід (робота в школі), брали участь у семінарах та методичних об'єднаннях учителів математики міста Умань та району, здійснювали аналіз тематичних та підсумкових контрольних робіт з алгебри учнів шкіл міста Умань та Черкаської області, вивчали помилки, яких припускалися учні під час написання ДПА та ЗНО з математики.

В констатувальному експерименті брали участь 178 учителів математики Черкаської, Одеської та Кіровоградської областей (п.1.1.2). В ході експерименту ми прийшли до висновку, що у зв'язку з відсутністю адекватного сучасним вимогам методичного забезпечення роботи над математичними помилками школярів, учителі в своїй діяльності насамперед керуються власним досвідом та інтуїцією. Більшість з них визнає потребу в розробленій методиці запобігання та попередження помилок учнів.

На констатувальному етапі дослідження було визначено, що розв'язання проблеми математичних помилок учнів основної школи має ґрунтуватися перш за все на врахуванні психолого-педагогічних особливостей учнів, мотивації до навчання, виборі доцільних форм, методів, засобів в діяльності попередження та недопущення помилок школярами. З цією метою на етапі пошукового експерименту було розроблено відповідну методичну систему, компоненти якої реалізовувались в процесі превентивної (попереджувальної) діяльності.

Отриманий на першому етапі дослідження матеріал дозволив сформулювати робочу гіпотезу дослідження, визначити основні цілі та завдання.

Другий етап (*пошуковий експеримент*) проводився в 2012 – 2014 рр, метою його проведення була розробка методичної системи запобігання математичним помилкам у процесі вивчення алгебри, відбір основних тісно пов'язаних змістових ліній, виокремлення методів, засобів, прийомів та форм організації навчання, що сприяло б підвищенню рівня навчальних досягнень учнів з алгебри.

На даному етапі здійснювався аналіз типових помилок учнів, вівся пошук найбільш ефективних методів, форм і прийомів для попередження їх появи. Ми впевнились, що попереджати помилки та коректувати знання доцільно в процесі спеціально організованої діяльності, що буде сприяти підсиленню мотивації до навчання та підвищенню рівня навчальних досягнень учнів. Здійснивши аналіз робіт науковців з організації превентивної (лат. *prevento* - попереджувальний, запобіжний, захисний) діяльності в галузі психології та педагогіки ми прийшли до висновку про доцільність здійснювати таку діяльність на уроках математики. *Під превентивною діяльністю вчителя математики ми розуміємо навчальну*

діяльність, яка ініціюється потребою: попередити математичні помилки учнів, виправити допущені, з'ясувавши причини їх появи та, обрати раціональні методи, організаційні форми та засоби навчання.

В ході дослідження було визначено зміст та структуру, функції і принципи превентивної діяльності вчителя математики, психолого-педагогічні, методичні і організаційні аспекти організації і здійснення такої діяльності у процесі навчання алгебри. Обрано безпосередньо пов'язані змістові лінії: вирази, рівняння і нерівності та функції, в ході вивчення яких використовувалась та перевірялась запропонована нами методична система попередження та виправлення учнівських помилок у процесі навчання алгебри.

Детальніше основні результати пошукового експерименту висвітлені нами у першому розділі дисертації.

Третій етап (*формувальний експеримент*) проводився з 2014-2018 рр. В експерименті взяли участь учні 7-9 класів. Метою формувального експерименту було впровадження запропонованої нами методичної системи запобігання математичним помилкам учнів у процесі вивчення алгебри як складової методичної системи навчання математики та перевірка ефективності розробленої методичної системи в умовах превентивної діяльності учителя математики.

Для досягнення мети формувального експерименту нами визначено такі завдання:

- вдосконалити наявні та розробити нові організаційні та методичні прийоми для засвоєння математичних знань учнів;
- розробити методичні матеріали попередження математичних помилок учнів;
- проводити семінари з учителями-експериментаторами з метою формування у них навичок організації та впровадження превентивної діяльності у процес навчання;
- визначити контрольні та експериментальні класи;
- перевірити вплив запропонованої методики на рівень навчальних досягнень учнів;

– здійснити експертне оцінювання педагогічної ефективності методики попередження, виявлення та виправлення помилок учнів під час навчання алгебри в основній школі.

На початковому етапі формувального експерименту вчителі експериментальних груп були ознайомлені з розробленою методикою організації превентивної діяльності під час вивчення виокремлених нами змістових ліній курсу алгебри основної школи. Відповідно до мети та завдань дослідження нами було розроблено навчально-методичне забезпечення для вчителів експериментальних груп у формі методичних рекомендацій: «Організація превентивної діяльності під час вивчення алгебри».

Експериментальна робота проводилася на базі загальноосвітніх шкіл I-III ступенів № 3, № 9, № 14 м. Умані, ОНЗ Савранський НВК «ЗОШ I-III ст. – ДНЗ» Одеської області, Благовіщенського НВК № 1, Кіровоградської області. Перед початком експерименту проведено майстер-клас та декілька нарад з учителями, які мали проводити заняття у експериментальних класах, обговорено робочі питання та надано відповідне методичне забезпечення.

В процесі формувального експерименту для виконання визначених завдань використовувались емпіричні та статистичні методи спостереження за процесом навчання у контрольних та експериментальних класах, проводилися бесіди з учнями та учителями контрольних і експериментальних класів, проводилися контрольні роботи учнями, використовувалися методи математичної статистики для обробки одержаних експериментальних результатів.

Під час експерименту однаковими були: зміст навчального матеріалу, визначений навчальною програмою з математики, кількість часу відведеного на його вивчення, підручники, зміст контрольних робіт у контрольних та експериментальних класах. Різною ж була методична діяльність учителя математики з математичними помилками учнів – традиційна (в контрольних класах) і превентивна (в експериментальних класах).

Протягом даного етапу педагогічного експерименту здійснювалась перевірка ефективності запропонованої методики з попередження, виявлення та

виправлення помилок учнів під час навчання алгебри в основній школі. Така перевірка здійснювалась шляхом проведення контрольних робіт однакового змісту в контрольних та експериментальних класах. Результати підлягали порівняльному аналізу. Вірогідність сформульованої нами гіпотези визначалась шляхом використання статистичних методів. Остаточні висновки про ефективність запропонованої методики попередження математичних помилок учнів дозволяє зробити статистичне опрацювання результатів контрольних робіт.

На кожному із зазначених вище етапів педагогічного експерименту, було відібрано методи дослідження і способи перевірки його ефективності. Все це й забезпечило вірогідність одержаних результатів. За результатами педагогічного експерименту зроблено висновки (відповідно до завдань дослідження), та запропоновано напрям подальших наукових пошуків.

В ході формувального експерименту ми спостерігали за успішністю учнів експериментальних та контрольних груп протягом навчання цих учнів у 7 класі, 8 класі та 9 класі.

В експериментальній роботі взяли участь по 250 учнів протягом 2015-2016, 2016-2017, 2017-2018 навчальних років ($N_e = 124$ в експериментальній групі і $N_k = 126$ в контрольній групі). Така кількість учасників експерименту передбачає доцільним використання t -критерію Стюдента, оскільки об'єми незалежних вибірок $N_e = 124$ і $N_k = 126$ більше 30, тому вибіркові середні розподілені нормально.

Таблиця 2.12

Кількісний склад учнів 7-их класів, 2015 - 2016 н.р.

Заклади середньої освіти	ЕГ (класів/учнів)	КГ (класів/учнів)
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 3, м. Умань	1/22	1/26
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 14 м. Умань	1/28	1/30
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 9, м. Умань	1/24	1/19
Благовіщенський НВК № 1	1/23	1/26
ОНЗ Савранський НВК «ЗОШ І-ІІІ ст. – ДНЗ»	1/27	1/25
Загальна кількість	5/124	5/126

Таблиця 2.13

Кількісний склад учнів 8-их класів, 2016-2017 н.р.

Заклади середньої освіти	ЕГ (класів/учнів)	КГ (класів/учнів)
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 3, м. Умань	1/22	1/26
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. №14, м. Умань	1/28	1/30
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 9, м. Умань	1/24	1/19
Благовіщенський НВК № 1	1/23	1/26
ОНЗ Савранський НВК «ЗОШ І-ІІІ ст. – ДНЗ»	1/27	1/25
Загальна кількість	5/124	5/126

Таблиця 2.14

Кількісний склад учнів 9-их класів, 2017 - 2018 н.р.

Заклади середньої освіти	ЕГ (класів/учнів)	КГ (класів/учнів)
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 3, м. Умань	1/22	1/26
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. №14, м. Умань	1/28	1/30
Загальноосвітня школа І-ІІІ ст. № 9, м. Умань	1/24	1/19
Благовіщенський НВК № 1	1/23	1/26
ОНЗ Савранський НВК «ЗОШ І-ІІІ ст. – ДНЗ»	1/27	1/25
Загальна кількість	5/124	5/126

Основним критерієм розподілу класів на експериментальну (ЕГ) і контрольну групу (КГ) було наступне: класи, в яких проводився пошуковий експеримент віднесено до ЕГ, бо учні і, відповідно, вчителі класів ЕГ були підготовлені до здійснення превентивної діяльності. Підбір вчителів відповідає умовам транспарентності. Таким чином, вибірки були однорідні і незалежні. Навчання у контрольних і експериментальних групах проводилися як різними вчителями, так і одним і тим же вчителем.

Відповідність рівнів навчальних досягнень школярів з математики за 12-бальною шкалою оцінювання і рівнів навчальних досягнень в умовах організації превентивної діяльності є однозначною.

Таблиця 2.15

**Рівні навчальних досягнень учнів за 12-ти бальною шкалою оцінювання і
рівні навчальних досягнень в умовах організації превентивної діяльності**

Рівні навчальних досягнень	Початковий			Середній			Достатній			Високий		
12-бальна шкала оцінювання	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Рівні навчальних досягнень в умовах превентивної діяльності	Початковий			Середній			Достатній			Високий		

Кількісному аналізу рівнів навчальних досягнень учнів з алгебри рівню навчальних досягнень в умовах превентивної діяльності співставлялась певна (умовна) оцінка, яка відповідала середньому балу 12-бальної шкали у відповідному інтервалі оцінок: початковому – «2», середньому – «5», достатньому – «8», високому – «11». Для кожної групи, що досліджувалась, обчислювались середнє значення результативності навчання учнів за вибраною системою оцінювання і дисперсія, що служить мірою згрупованості дослідних даних навколо середнього значення.

Обчислення здійснювалося за формулами:

- середнє значення вибірок: $x_c = \frac{2 \cdot n_1 + 5 \cdot n_2 + 8 \cdot n_3 + 11 \cdot n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$

де n_1, n_2, n_3, n_4 кількість учнів досліджуваної групи, віднесених до початкового, середнього, достатнього і високого рівнів навчальних досягнень;

- дисперсія: $D = \frac{(2 - x_c)^2 \cdot n_1 + (5 - x_c)^2 \cdot n_2 + (8 - x_c)^2 \cdot n_3 + (11 - x_c)^2 \cdot n_4}{n_1 + n_2 + n_3 + n_4}$.

Для з'ясування чи є відмінності в середніх значеннях рівнів в експериментальній і контрольній групах до і після проведення експерименту суттєвими, чи вони є випадковими, підраховувались значення t -критерію Стюдента:

$$t = \frac{|x_{c,e} - x_{c,k}|}{\sqrt{\frac{D_e}{N_e} + \frac{D_k}{N_k}}},$$

де $x_{c,e}$, $x_{c,k}$ – середнє значення рівнів у експериментальній і контрольній групах D_e , D_k – відповідні їм дисперсії.

Задавши 95-відсоткову ймовірність, значущості висновків про характер відмінностей середніх значень досліджуваних рівнів у контрольній і експериментальній групах (або у кожній з груп до і після експерименту), знаходимо з таблиці, яка пов'язує t з інтегралом ймовірності [213], критичне значення $t_{кр} = 1,96$, що відповідає заданій ймовірності. Відповідно до основних положень математичної статистики [213] на кожному етапі експерименту робимо висновок, що відмінності $x_{c,e}$ і $x_{c,k}$ є випадковими, якщо $t < t_{кр}$, або ж істотними, якщо $t > t_{кр}$. Числові розрахунки середніх значень, дисперсії і t -критерію Стюдента за результатами досліджень здійснювались за допомогою табличного процесора Excel з використанням вбудованих у ньому математичних і статистичних функцій. Експеримент складався із трьох констатувальних і формувальних зрізів навчальних досягнень учнів на початку і кінці кожного навчального року упродовж вивчення ними алгебри у 7-9 класах. Порівняльні результати констатувальних і формувальних зрізів в ЕГ і КГ представлені в таблицях 2.16, 2.17, 2.18, 2.19.

Таблиця 2. 16

Рівні навчальних досягнень учнів 7-х класів в контрольній і експериментальній групі (констатувальний і формувальний зрізи)

Рівні	Констатувальний зріз				Формувальний зріз			
	КГ		ЕГ		КГ		ЕГ	
	<i>N</i>	%	<i>N</i>	%	<i>N</i>	%	<i>N</i>	%
Початковий	5,00	3,97	5,00	4,03	4,00	3,17	3,00	2,42
Середній	52,00	41,27	46,00	37,10	48,00	38,10	44,00	35,48
Достатній	49,00	38,89	48,00	38,71	52,00	41,27	50,00	40,32
Високий	20,00	15,87	25,00	20,16	22,00	17,46	27,00	21,77

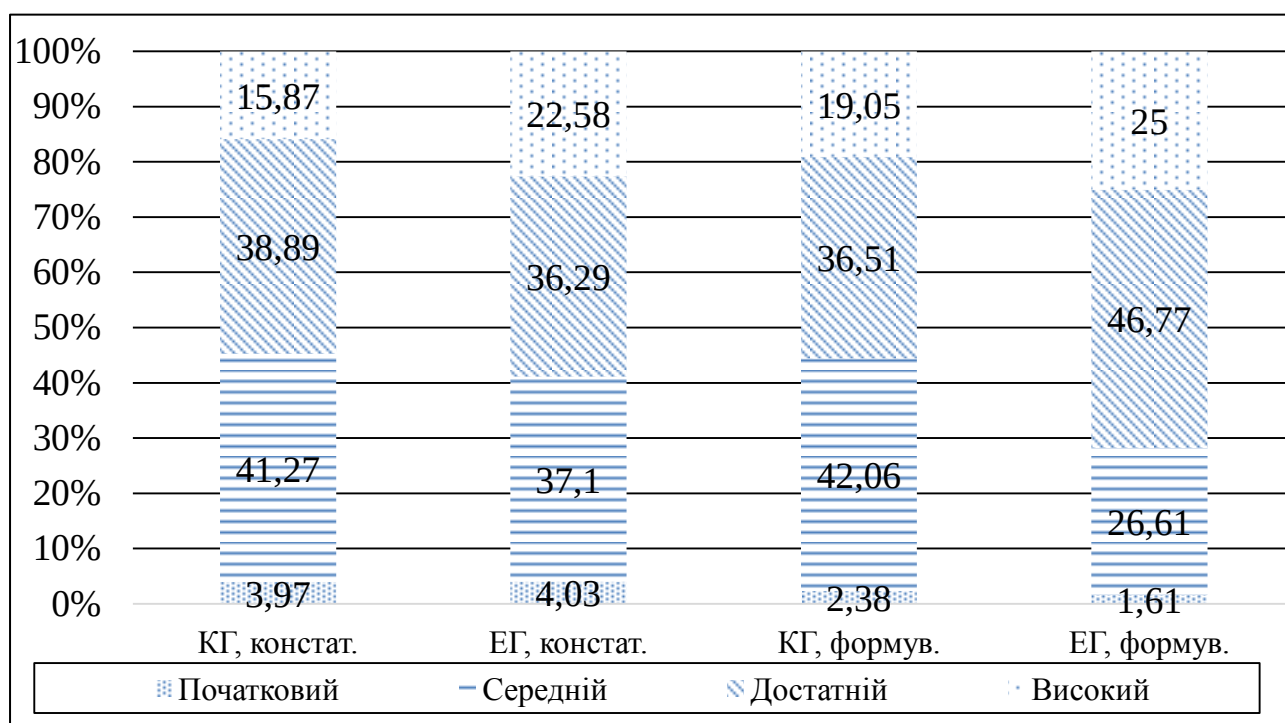


Рис. 2.3. Порівняльна характеристика навчальних досягнень учнів 7 класів

Таблиця 2.17

Рівні навчальних досягнень учнів 8-х класів в контрольній і експериментальній групі (констатувальний і формувальний зрізи)

Рівні	Констатувальний зріз				Формувальний зріз			
	КГ		ЕГ		КГ		ЕГ	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Початковий	4,00	3,17	3,00	2,42	3,00	2,38	2,00	1,61
Середній	52,00	41,27	44,00	35,48	50,00	39,68	40,00	32,26
Достатній	49,00	38,89	49,00	39,52	51,00	40,48	53,00	42,74
Високий	21,00	16,67	28,00	22,58	22,00	17,46	29,00	23,39

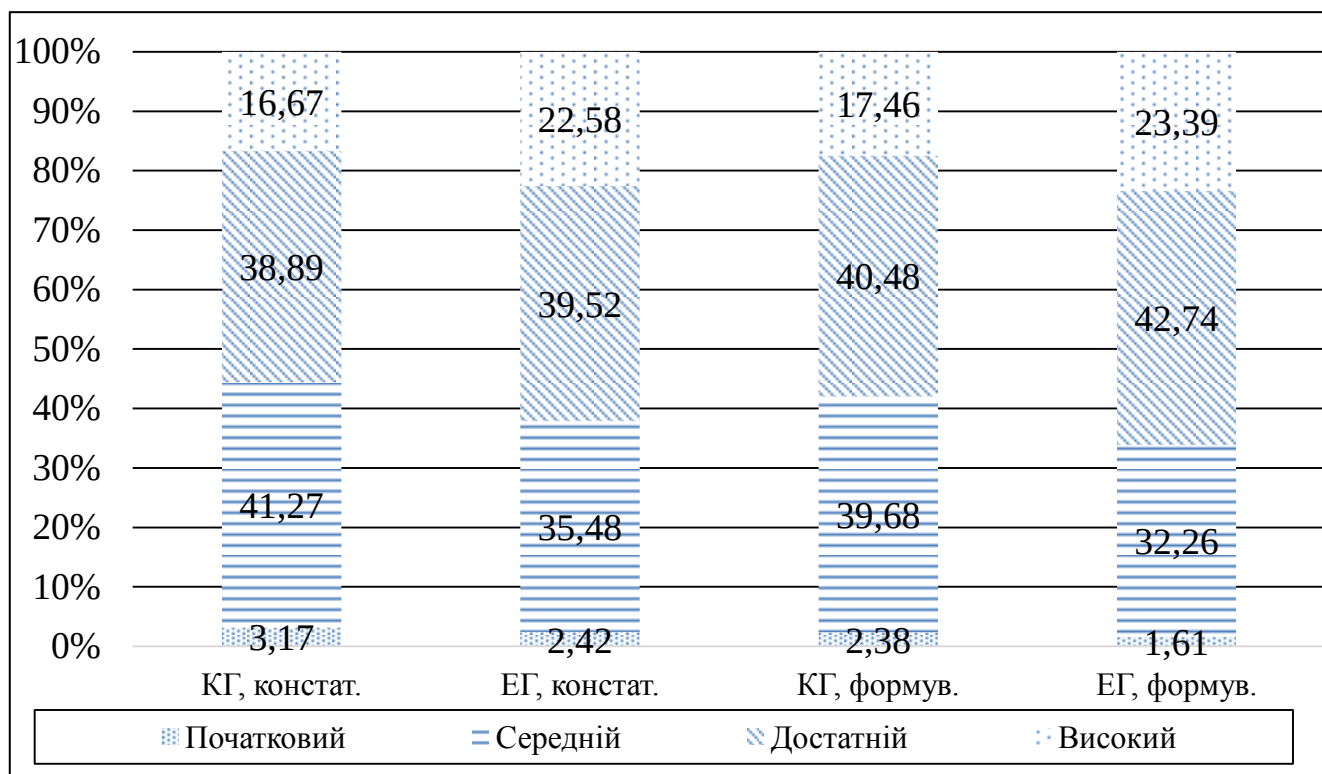


Рис. 2.4 .Порівняльна характеристика навчальних досягнень учнів 8 класів

Таблиця 2.18

Рівні навчальних досягнень учнів 9-х класів класів в контрольній і експериментальній групі (констатувальний і формувальний зрізи)

Рівні	Констатувальний зріз				Формувальний зріз			
	КГ		ЕГ		КГ		ЕГ	
	N	%	N	%	N	%	N	%
Початковий	3,00	2,38	2,00	1,61	3,00	2,38	2,00	1,61
Середній	51,00	40,48	41,00	33,06	53,00	42,06	33,00	26,61
Достатній	50,00	39,68	52,00	41,94	46,00	36,51	58,00	46,77
Високий	22,00	17,46	29,00	23,39	24,00	19,05	31,00	25,00

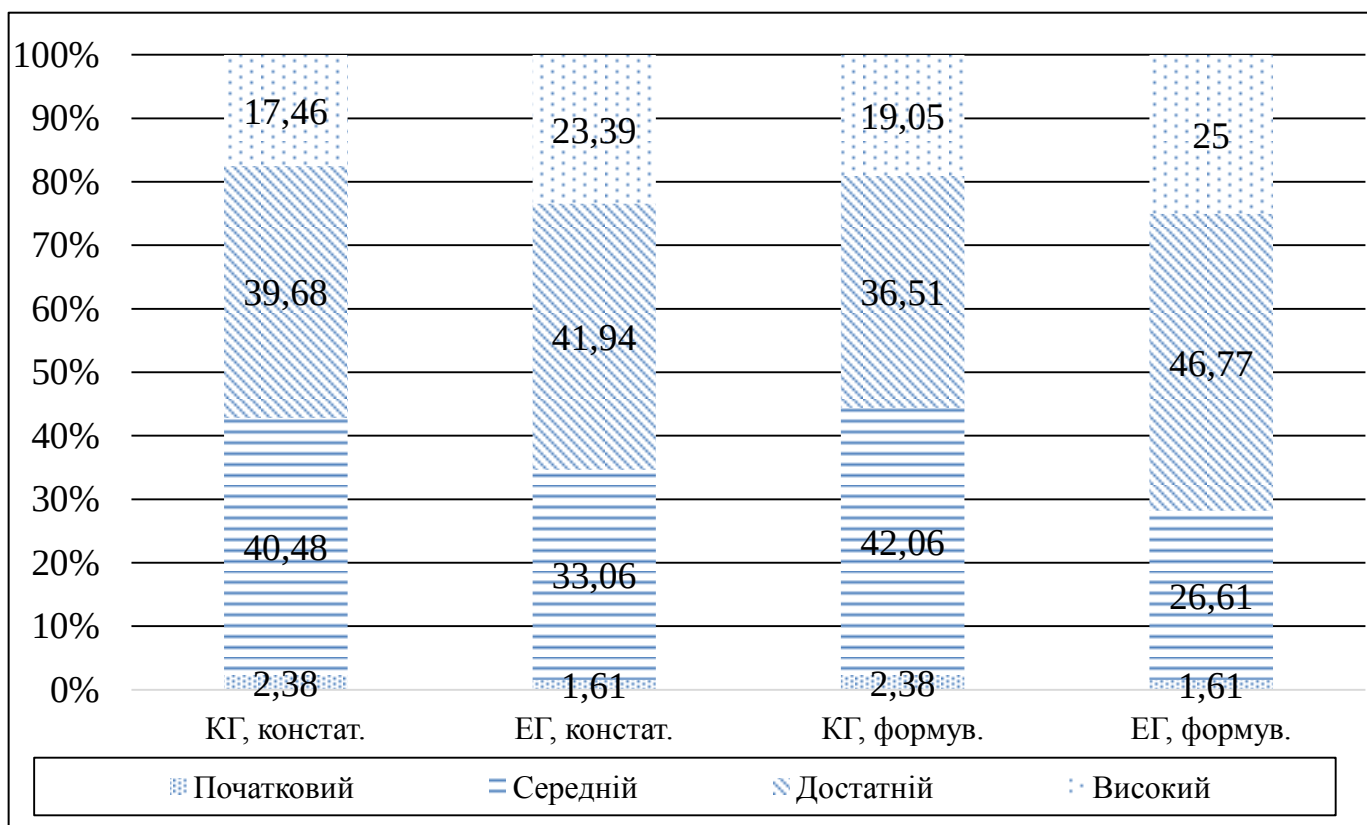


Рис. 2.5 Порівняльна характеристика навчальних досягнень учнів 9 класів

Співставляючи результати між ЕГ і КГ, можна констатувати наступне: середня успішність учнів з алгебри контрольної і експериментальної груп на констатувальному етапі експерименту відрізняється ($x_{c,e}=7,32$, $x_{c,k}=7,00$) проте відмінності між ними вважаємо несуттєвими, тому що $t = 1,04 < t_{кр} = 1,96$, що свідчить про те, що групи є рівноцінними на початку експерименту. Після проведення експериментальної роботи, результати підсумкового зрізу показали, що середня успішність в обох групах зросла: в експериментальній групі до значення $x_{c,e} = 8,12$, тобто на 0,8, а в контрольній групі до $x_{c,k} = 7,17$, тобто на 0,17 (див. Табл. 2.19).

Таблиця 2.19

**Узагальнені дані навчальних досягнень учнів
під час педагогічного експерименту**

Рівні навчальних досягнень (оцінки)	Бали	Етапи експериментального дослідження							
		констатувальний				формувальний			
		КГ		ЕГ		КГ		ЕГ	
		N	%	N	%	N	%	N	%
Початковий	2	5,00	3,97	5,00	4,03	3,00	2,38	2,00	1,61
Середній	5	52,00	41,27	46,00	37,10	53,00	42,06	33,00	26,61
Достатній	8	49,00	38,89	45,00	36,29	46,00	36,51	58,00	46,77
Високий	11	20,00	15,87	28,00	22,58	24,00	19,05	31,00	25,00
Усього учнів		126,00		124,00		126,00		124,00	
Середнє значення		7,00		7,32		7,17		8,12	
Дисперсія		5,57		6,36		5,66		5,28	
Істотність відмінностей за t-критерієм Стьюдента		КГ і ЕГ до експерименту		КГ до і після експерименту		КГ і ЕГ після експерименту		ЕГ до і після експерименту	
		1,04		0,56		3,23		2,61	

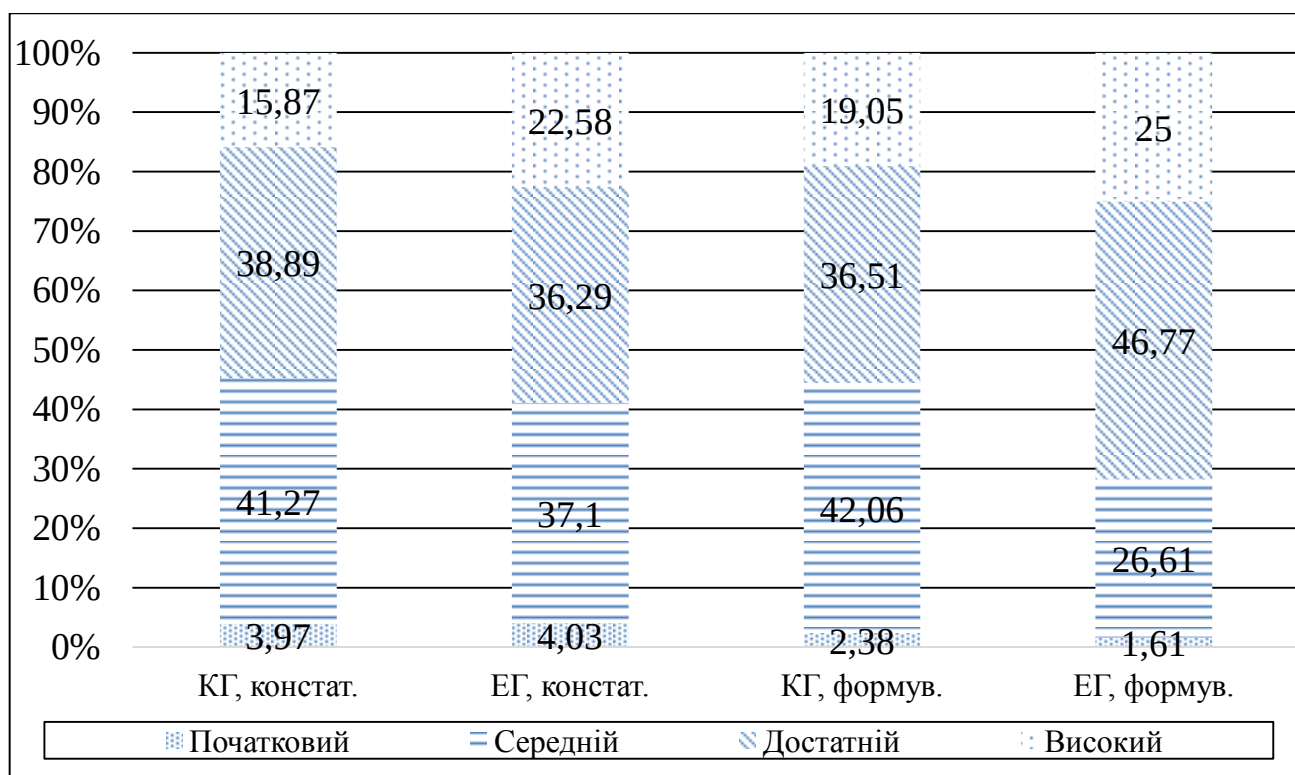


Рис. 2.6. Порівняльний аналіз навчальних досягнень учнів під час формувального експерименту.

Порівнюючи успішність в обох групах до і після експерименту за t -критерієм Стьюдента, можемо зробити висновок, що відмінність успішності контрольної групи на обох етапах є випадковою, оскільки для неї $t = 0,56 < t_{кр} = 1,96$, тоді як для експериментальної групи $t = 2,61 > t_{кр} = 1,96$, що свідчить про ефективний вплив на рівень навчальних досягнень учнів експериментальних класів проведеної роботи за експериментальною методикою. Цей же висновок про ефективність запропонованої методики випливає з порівняльного аналізу успішності учнів експериментальної і контрольної груп, оскільки $t = 3,23 > t_{кр} = 1,96$, що вказує на не випадковість їх відмінностей, обумовлену запровадженням в експериментальній групі запропонованої нами методики.

Отже, пошуковий і формувальний експерименти підтвердили педагогічну ефективність запропонованої нами методичної системи аналізу та попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі.

Висновки до другого розділу

1. З метою попередження та запобігання математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі необхідно знати типові помилки, яких припускаються учні, причини їх появи.

2. Вважаємо, що доцільно доповнити методичну систему навчання алгебри в основній школі підсистемою, яка є теж методичною системою, у своєму дослідженні ми назвали її «Методичною системою попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі». Реалізувались всі компоненти даної системи через організацію та здійснення превентивної діяльності.

3. Організовуючи превентивну діяльність з алгебри за змістовими лініями: вирази та перетворення виразів, рівняння та нерівності, функції і їх графіки, необхідно максимально враховувати та виділяти для учнів взаємозв'язки між поняттями і способами дій, які розглядаються за кожною змістовою лінією, а також виділяти орієнтовні основи тієї діяльності, яка необхідна для розв'язування відповідних алгебраїчних завдань.

4. Для успішної організації превентивної діяльності за змістовими лініями необхідно враховувати взаємозв'язки між цими змістовими лініями, як на програмному етапі навчання, так і в майбутньому.

5. Для активізації пізнавальної діяльності учнів, спрямованої на попередження помилок при вивченні тотожних перетворень, доцільно організовувати роботу з систематизації основних теоретичних положень, формул та умінь і навичок їх використання, узагальнення знань і умінь учнів, які стосуються тотожних перетворень, засвоєних на попередньому етапі вивчення даної змістової лінії, а також прогнозувати можливість появи помилок та використовувати засоби їм запобігання.

6. З метою запобігання помилок учнів при вивченні рівнянь та нерівностей потрібно виділити орієнтовні основи діяльності з пошуку плану розв'язування та розв'язування рівнянь і нерівностей певного виду; організувати навчання так, щоб школярі засвоїли ці орієнтовні основи; виокремити особливості розв'язування дробових нерівностей.

7. Змістова лінія функції і їх графіки потребує особливого підходу в превентивній діяльності. З метою запобігання помилок необхідно вже на перших уроках вивчення функцій домагатися розуміння поняття функції, області визначення, області значень, графіка функції, осмислення властивостей функції.

8. Результати експерименту показали ефективність запропонованої методики, спрямованої на попередження та запобігання помилок учнів. При використанні цієї методики вчителі активізували увагу на причинах появи помилок, засобах попередження та недопущення помилок, формах організації навчання в умовах превентивної діяльності. Учні успішно розв'язували завдання підсумкових контрольних робіт, одержували вищі бали, що свідчить про підвищення рівня навчальних досягнень.

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розглянута важлива проблема – підвищення рівня успішності учнів основної школи під час навчання алгебри шляхом упровадження в навчальний процес превентивної діяльності вчителя й учнів. Відповідно до поставленої мети і визначених завдань дослідження отримано такі **результати**:

–*здійснено аналіз* науково-методичної, психолого-педагогічної літератури з проблеми дослідження;

–*вивчено* стан проблеми дослідження в практиці навчання алгебри учнів основної школи;

–*уведено нове поняття: превентивно-педагогічна діяльність учителя* на уроках математики, окреслено мету та основні структурні компоненти такої діяльності; визначено *функції і принципи* превентивної діяльності;

–*виокремлено* важливий компонент професійної культури вчителя математики – *превентивну культуру*;

–*систематизовано* помилки учнів за змістовими лініями: вирази і дії над ними, рівняння і нерівності, функції і їх графіки;

–*визначено і науково обґрунтовано* компоненти методичної системи попередження типових помилок учнів як складової методичної системи навчання математики;

–*експериментально перевірено* дієвість методичної системи попередження типових помилок учнів у навчанні алгебри основної школи;

Усі завдання дослідження успішно розв'язані, а отримані результати дозволяють сформулювати такі **висновки**:

1. Успішність учнів з алгебри в основній школі обумовлена багатьма чинниками: технологіями навчання, майстерністю вчителя, ефективними засобами і методами навчання тощо. Значущим чинником виступає також і превентивно-педагогічна діяльність вчителя і превентивна діяльність учнів, яка ініціюється потребою заздалегідь передбачати помилкові дії учнів, виявляти їх, з'ясовувати причини появи, долати, підвищуючи цим самим результати навчання. Вона має здійснюватися в межах навчально-пізнавальної діяльності, підпорядковуючись

меті й завданням останньої. Але аналіз психолого-педагогічної літератури, а також стану проблеми в теорії і практиці сучасної школи доводить, що, не дивлячись на те, що помилки учнів та робота над ними постійно знаходяться в полі зору психологів, методистів, педагогів, учених-математиків, відсутня науково обґрунтована методика виявлення причин появи типових математичних помилок учнів, їх попередження та виправлення.

2. Повноцінна превентивно-педагогічна діяльність, як і всяка інша, має включати потреби, мотиви, мету, умови досягнення мети, планування, дії та операції. До переліку таких дій входять виявлення, аналіз, попередження, виправлення математичних помилок учнів. Успішно організована, превентивна діяльність багатофункціональна, виконує у навчальному процесі низку важливих функцій: діагностичну, прогностичну, попереджувальну, стимулюючу, навчальну, розвивальну, виховну, коригуючу, методичну, емоційно-збережувальну, психологічну та інші. Вона має здійснюватись на основі важливих дидактичних принципів: індивідуального підходу до учнів, диференційованого підходу до організації навчального процесу, систематичності й послідовності, розвитку мнемонічної діяльності, цілеспрямованого формування алгоритмічних і евристичних прийомів розумової діяльності, усвідомлення усіма учнями навчального матеріалу, мотивації позитивного ставлення до навчання, зв'язку теорії з практикою тощо.

3. Навчання алгебри, й не тільки, без появи помилкових дій учнів неможливе. Вони виникають як з об'єктивних, так і суб'єктивних причин. Вчителю важливо знати типові з них, щоб працювати на попередження, а в разі допущення учнями – своєчасно виявляти їх. Типові математичні помилки учнів у навчанні алгебри доцільно розглядати в системі, групуючи за змістовими лініями курсу: вирази і дії над ними; рівняння і нерівності; функції і їх графіки. Такий підхід обумовлений тісним зв'язком між знаннями учнів, набутими на кожному з етапів вивчення певної змістової лінії.

4. У ході експериментального дослідження було встановлено ефективність таких методів та прийомів превентивно-педагогічної діяльності як: пояснення

нового матеріалу на основі повторення, узагальнення й систематизації відомого, постійного зв'язку між вивченим і новим; візуалізація навчального матеріалу через опорні схеми, карти знань, піктограми; провокація учнів на помилку через розв'язування завдань із «пастками»; використання прийомів ейдетики, холістичного навчання для кращого запам'ятовування навчального матеріалу; обернених задач; використання установок на запам'ятовування, завдань на розвиток самоконтролю; поетапне формування розумових дій (за П. Я. Гальперіним); використання контрприкладів для виявлення та виправлення помилок; використання методу аналогії та протиставлення з метою запобігання хибної аналогії; розкриття софізмів; розв'язування задач з несформульованим питанням, задач з неповним або надлишковим складом умови, задач, що мають декілька розв'язків, задач на міркування, провокативних задач; складання завдань учнями.

Під час вивчення перетворень виразів ефективним виявилось використання принципу систематизації основних теоретичних положень, формул та умінь і навичок їх використання, узагальнення знань і умінь учнів, які торкаються тотожних перетворень, засвоєних на попередньому етапі вивчення даної змістової лінії, прогнозування помилок та їх попередження.

З метою запобігання помилок учнів при вивченні рівнянь та нерівностей доцільним виявилось: виділення орієнтовної основи діяльності з пошуку плану розв'язування рівнянь і нерівностей певного виду та виокремлення особливостей розв'язування дробових нерівностей.

Змістова лінія функції і їх графіки потребує особливого підходу в превентивно-педагогічній діяльності. З метою запобігання помилок необхідно, щоб учні усвідомили поняття функції, області визначення, області значень, графіка функції, вміли визначати властивості функцій за побудованими графіками. В організації та проведенні роботи над помилками учнів під час вивчення алгебри доцільним і ефективним є використання ІКТ, програмних засобів навчального призначення CRAN1, GeoGebra, Advanced Grapher, MathCad; створення інфографіки за допомогою сервісу Piktochart; створення схем та карт знань за

допомогою сервісу Mindmeister та програми Mindjet Mind Manager; створення презентацій в PowerPoint.

5. Результати педагогічного експерименту підтвердили можливість та технологічну ефективність використання вчителями запропонованої в дослідженні методичної системи попередження математичних помилок у навчанні алгебри в основній школі. Упровадження запропонованої методичної системи організації превентивної діяльності у навчанні суттєво сприяє підвищенню ефективності процесу навчання алгебри, рівня досягнень математичної підготовки учнів основної школи.

Мета дослідження досягнута, поставлені завдання виконані. Проведене дослідження не вичерпує всіх аспектів означеної проблеми. Більш системного і глибокого узагальнення потребує: організація превентивної діяльності у процесі вивчення всього курсу алгебри; формування превентивної культури вчителя математики під час навчання у педагогічному закладі освіти та на курсах підвищення кваліфікації педагогічних працівників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Алексєва М. І. Мотиви навчання учнів. Київ: Рад. школа, 1974. 118 с.
2. Алгебра: підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів / Буковська О. І., Васильєва Д. В., Глобін О. І., Сільвестрова І. А. Київ: Педагогічна думка, 2017. 320 с.
3. Амонашвили Ш.А. Гуманно-личностный подход к детям. Москва: Институт практ. психологии., 1998. 539 с.
4. Асанов Р. А. Работа над ошибками в курсе математики средней школы как путь повышения качества знаний учащихся: автореф. дис. канд. пед наук. Ташкент, 1975. 26 с.
5. Асанов Р.А. Работа над ошибками при обучении математике. Из опыта-преподавания математики в школе: пособие для учителей / сост.: А. Д. Семушин, С. Б. Суворова. Москва: Просвещение, 1978. С. 70–77.
6. Артемов А. К. Состав и методика формирования геометрических умений школьников. Пенза: Пензенское отделение, 1969. 366 с.
7. Бабанский Ю. К. Методы обучения в современной школе. Москва: Просвещение, 1985. 207 с.
8. Бабанский Ю. К. Оптимизация учебно-воспитательного процесса: Методические основы Москва: Просвещение, 1982. 192 с.
9. Бабанский Ю. К. Оптимизация процесса обучения. Общедидактический аспект. Москва: Педагогика, 1977. 154 с.
10. Бабанский Ю.К. Рациональная организация учебной деятельности. Москва: Знание, 1981. 96 с.
11. Балл Г. А. Об основных положениях и некоторых применениях теории познавательных задач. *Вопросы психологии*. 1984. № 3 С. 31–41.
12. Бєвз Г. П. Методика викладання математики: навч. посібник. 3–тє вид., перероб. і допов. Київ: Вища школа, 1989. 367 с.
13. Бєвз Г.П., Бєвз В.Г. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Відродження, 2015. 288с.

14. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Освіта, 2016. 254 с.
15. Бевз Г.П. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Відродження, 2017. 272с.
16. Беличева С. А. Основы превентивной психологи. Москва: Ред. изд. центр консорциума «Социальное здоровье России», 1993. 198 с.
17. Белкин А.С. Ситуация успеха. Как ее создать: кн. для учителя. Москва: Педагогика, 1991. 176 с.
18. Благодир Л. А. Робота над помилками як одна з форм подолання прогалин у знаннях і вміннях учнів. *Психолого-педагогічні проблеми сільської школи*: зб. наук. праць Уманського державного педагогічного університету ім. Павла Тичини / редкол.: Побірченко Н. С. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2009. Вип. 30. С. 62–70.
19. Благодир Л. А., Благодир Ф. К. Впровадження сучасних інформаційних технологій на уроках математики. *Збірник наукових праць Уманського державного педагогічного університету імені Павла Тичини* / редкол.: Мартинюк М. Т. (голов. ред) та ін. Умань: Жовтий О. О., 2008. Ч. 2. С. 75–82.
20. Благодир Л. А., Швець В. О. Математичні помилки як об'єкт наукових досліджень. *Наукові записки Національного педагогічного університету імені М. П. Драгоманова. Серія: Педагогічні та історичні науки* / МОН України, Нац. пед. ун-т ім. М. П. Драгоманова. Київ: Вид-во НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. Вип. 93. С. 19–28.
21. Благодир Л. А. Помилки учнів у навчанні алгебри: практичний аспект. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: міжнар. зб. наук. робіт. Донецьк: Вид-во ДонНУ, 2011. Вип. 35. С. 147–153.
22. Благодир Л. А. Превентивна культура вчителя математики: знання та уміння. *Сучасні інформаційні технології та інноваційні методики навчання у підготовці фахівців: методологія, теорія, досвід, проблеми*. Вип. 33. Київ-Вінниця: Планер, 2012. С. 223–226.

23. Благодир Л. А., Швець В. О. Превентивна діяльність вчителя математики: зміст і структура. *Дидактика математики: проблемы и исследования*: межд. сб. науч. работ. Донецк: ТЕАН, 2010. Вып. 36. С. 13–18.

24. Благодир Л. А., Швець В. О. Функції і принципи превентивної діяльності вчителя математики. *Науковий часопис НПУ ім. М. П. Драгоманова. Серія №3: Фізика і математика у вищій і середній школі*: зб. наук. праць. Київ: НПУ ім. М. П. Драгоманова, 2011. №8. С. 17–23.

25. Благодир Л. А., Швець В. О. Формування вмінь і навичок превентивної діяльності майбутнього вчителя математики. *Вища освіта України*: теоретичний та науково-методичний часопис. №3(46). Том 2. Матеріали міжнар. наук.-практ. конф. «Педагогіка вищої школи: методологія, теорія, технології». Київ, 2012. С. 38–46.

26. Благодир Л. А. Превентивна діяльність під час навчання школярів математики. *Математика в рідній школі*, 2014. №2. С. 16–20.

27. Благодир Л. А. Формування методичної компетентності майбутніх учителів математики у ВНЗ. *Педагогічні науки: теорія, історія, інноваційні технології*: наук. журнал / голов. ред. А. А. Сбруєва. Суми: Вид-во СумДПУ імені А. С. Макаренка, 2016. №2 (56). С. 180–187.

28. Благодир Л. А. Упередження помилок учнів з алгебри у процесі вивчення змістової лінії «Вирази». *Науковий вісник Національного університету біоресурсів і природокористування України. Серія: Педагогіка, психологія, філософія* / редкол.: С. М. Ніколаєнко (відп. ред.) та ін. Київ: Міленіум, 2018. Вип. 291. С. 25–30.

29. Благодир Л. А. Алгоритмічна компетентність як складова інформаційно-цифрової компетентності учня. *Проблеми підготовки сучасного вчителя*: збірник наук. праць Уманського держ. пед. ун-ту імені Павла Тичини. / редкол.: Безлюдний О.І.(голов. ред.) та ін. Умань: Візаві, 2018. Вип.17. С. 148–155.

30. Благодыр Л. А., Швец В. А. Алгебраические ошибки школьников: содержание и причины. *Mathtech 2012: proceedings of the international conference*. Vol. 1. Shumen-Bulgaria: Konstantin Preslavsky University Press, 2012. С. 222–227.

31. Благодыр Л. А., Швец В. А. Предупреждение алгебраических ошибок – предпосылка успешного обучения. *Сборник научни трудове частни и общественени науки, организация, управление и методика на обучението въ ввисяните училища*. Ч II. Шумен: НВУ «В. Левски», 2014. С. 76–79.

32. Благодыр Л. А., Швец В. А. Подготовка будущего учителя математики к превентивной деятельности. *Проблемы теории и практики обучения математике*: сб. науч. работ, представленных на Междунар. науч. конф. «67 Герценовские чтения» / под ред. В. В. Орлова. СПб: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2014. С. 60–62.

33. Блонский П. П. Память и мышление. Санкт-Петербург: Питер, 2001. 288с.

34. Богоявленский Д. Н., Менчинская Н. А. Психология усвоения знаний в школе. Москва: Изд. АПН РСФСР, 1959. 346 с.

35. Богоявленский Д. Н. Формирование приемов умственной работы учащихся как путь развития мышления и активизации учащихся. *Вопросы психологии*. 1962. №4. С. 75–81.

36. Божович Е. Д. Некоторые вопросы обучения по образцам (в школе). *Вопросы психологии*. 1980. № 2. С. 135–139.

37. Божович Л. И. Изучение мотивации поведения детей и подростков. Москва: Педагогика, 1972. 351 с.

38. Болтянский В. Г. Преодолеть заблуждения, связанные с ОДЗ. *Математика в школе*. 1975. № 5. С. 12–15.

39. Бондар С, Бондар В. Оновлення змісту освіти і процесу навчання у школі : Сучасні тенденції. *Математика в школі*. 2006. № 4. С. 8–13.

40. Брадис В. М., Минковский В. Л, Харчева А. К. Ошибки в математических рассуждениях: пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1967. 191 с.

41. Бродський Я., Павлов О., Сурядна О. З досвіду моніторингових досліджень готовності учнів до навчання математики в основній школі. *Математика в школі*. 2002. № 3. С. 20–24.

42. Бродський Я. С., Павлов О. Л. Шляхи реформування шкільної математичної освіти. *Математика в школах України*. 2003. №26. С. 2–6.

43. Брунер Дж. Психология познания. Москва. : Прогресс, 1977. 414с.
44. Бурда М. І. Принципи відбору змісту шкільної математичної освіти. *Педагогіка та психологія*. 1996. № 1. С. 4–9.
45. Бурда М.І. Методичні основи диференційованого формування геометричних умінь учнів основної школи: автореф. дис. д-ра пед. наук.:13.00.02. Київ, 1994. 36 с.
46. Великий тлумачний словник сучасної української мови / уклад. і голов. ред. В.Т. Бусел. Київ. Ірпінь: Перун, 2004. 440 с.
47. Векслер С. И. Найти и преодолеть ошибку. *Математика в школе*. 1989. №5. С. 40–42.
48. Векслер С. І. Розвиток критичного мислення учнів у процесі навчання. Київ: Радянська школа, 1971. 59 с.
49. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. / О. В. Скрипченко, Л. В. Долинська та ін. Київ: Каравелла, 2006. 344 с.
50. Вікова психологія / За ред. Г. С. Костюка. Київ: Вища школа, 1976. 269 с.
51. Воловик П. М. Теорія імовірностей і математична статистика в педагогіці. Київ: Радянська школа, 1969. 222 с.
52. Воловик П. М. Проблеми підвищення якості педагогічних досліджень *Проблеми та перспективи формування національної гуманітарно-технічної еліти*: зб. наук. пр.Харків, 2002. Вип. 3. С.111–118.
53. Выготский, Л. С. Вопросы детской психологии. Санкт-Петербург: Союз, 1997. 224 с.
54. Выготский Л. С. Избранные психологические исследования. Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1956. 520 с.
55. Выготский Л. С. Воображение и творчество в детском возрасте. Москва: Просвещение, 1991. 96 с.
56. Выготский Л. С. Педагогическая психология. Москва: Педагогика, 1991. 480 с.
57. Выготский, Л. С. Мышление и речь. Москва: Педагогика, 1982. 362с.

58. Гайштут О. Г., Литвиненко Г. М. Розв'язування алгебраїчних задач. Київ: Рад. школа, 1991. 224 с.
59. Гальперин П. Я. Несколько разъяснений к гипотезе умственных действий. *Вопросы психологии*. 1960. № 4. С. 141–148.
60. Гальперин П. Я., Талызина Н. Ф. Современное состояние теории поэтапного формирования умственных действий. *Вестник МГУ. Психология*. 1979. № 4. С. 54 - 63.
61. Гальперин П. Я. Типы ориентировки и типы формирования действий и понятий. *Докл. АПН РСФСР*. 1958. № 2. С. 12–22.
62. Гальперин П. Я., Кабыльницкая С. Л. Экспериментальное формирование внимания. Москва: Изд-во Московского университета, 1974. 102 с.
63. Гальперин П.Я. Зависимость обучения от типа ориентировочной деятельности. Москва: Изд.-во Моск. ун-та, 1968. 238 с.
64. Гальперин П. Я. Методы обучения и умственное развитие ребенка. Москва: Изд-во МГУ, 1985. 45 с.
65. Гальперин П. Я. Управление познавательной деятельностью учащихся. Москва: Изд. Моск. ун.-та, 1972. 262 с.
66. Гальперин, П. Я. Основные результаты исследования по проблеме «Формирование умственных действий и понятий». Москва: Педагогика, 1965. 356 с.
67. Гончаренко С. Український педагогічний словник Київ: Либідь, 1997. 376 с.
68. Гончаренко С. У. Методика навчання і наукових досліджень у вищій школі. Київ: Вища школа, 2003. 323 с.
69. Григорян Г. В. Исследование причин возникновения и методика предупреждения ошибок учащихся: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Баку, 1981. 16 с.
70. Груденов Я. И. Психолого-дидактические основы методики обучения математике. Москва: Педагогика, 1987. 159 с.

71. Груденов Я. И., Середа А. М., Середа В. И. Психология подсказывает методике. *Математика в школе*. 1990. №6. С. 33 – 34.
72. Груденов Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 224 с.
73. Грузін О. І., Неліна О. Є. Система опорних фактів шкільного курсу геометрії. Харків: Світ Дитинства, 2000. 128 с.
74. Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения: опыт теоретического и экспериментального психологического исследования. Москва: Педагогика, 1986. 240 с.
75. Давыдов В. В. Формирование учебной деятельности школьников. Москва: Педагогика, 1982. 216 с.
76. Дайри Н. Г. Основное освоить на уроке. Москва: Просвещение, 1987. 128 с.
77. Далингер В. А. Методика реализации внутрипредметных связей при обучении математике: Кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1991. 80 с.
78. Далингер В. А. Внутрипредметные связи как методическая основа совершенствования процесса обучения математике в школе: автореф. дис. д-ра. пед.наук: 13.00.02. Санкт-Петербург, 1992. 44 с.
79. Далингер, В. А. Типичные ошибки по математике на вступительных экзаменах и как их не допускать. Омск: Областной ин-т усовершенствования учителей, 1991. 129 с.
80. Даль В. И. Толковый словарь живого великорусского языка: в 4 т. Москва: Русский язык, 1989. Т. 2. 780 с.
81. Данилов М. А. Об условиях развития познавательной самостоятельности и активности учащихся на уроках. Москва: Просвещение, 1963. 248 с.
82. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти *Освіта України*. 2004. № 5. С.1– 13.
83. Дидактика современной школы: Пособие для учителей / Б. С. Кобзарь и др.; под. ред В. А. Онищука. Київ: Рад. шк., 1987. 351 с.
84. Дидактика средней школы: Некоторые проблемы современной дидактики / под. ред. М. Н. Скаткина. 2-е изд. Москва: Просвещение, 1982. 319 с.

85. Дистервег А. Избранные педагогические сочинения. Москва: Педагогика, 1956. 423 с.
86. Державний стандарт базової і повної загальної середньої освіти: затверджено постановою Кабінету Міністрів України від 23 листопада 2011р. № 1392. URL:<http://zakon2.rada.gov.ua/laws/show/1392-2011-п#n9> (дата звернення: 10.02.2019).
87. Дремова І. А. Особистісна зорієнтованість контролю результатів навчання математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: міжнар. збірник наук. робіт. Донецьк: ТЕАН, 2000. № 3 (13). С. 66 – 72.
88. Дубинчук О. С., Мальований Ю. І., Дичек Н. П. Методика викладання алгебри в 7–9 класах: посіб. для вчителя. Київ: Рад. шк., 1991. 254 с.
89. Евдокимов В.И. Научные основы повышения эффективности обучения средствами наглядности: автореф. дис. д-ра пед. наук. Киев, 1990. 23 с.
90. Енциклопедія освіти / АПН України; голов. ред В. Г. Кремінь. Київ: Юрінком Інтер, 2008. 1040 с.
91. Епишева О. Б., Крупич В. И. Учить школьников учиться математике: формирование приемов учеб. деятельности: кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1990. 128 с.
92. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264с.
93. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 272с.
94. Жалдак М. И. GRAN1 – математика для всех. *Компьютеры. Программы*. 1995. №5(20). С.72– 76.
95. Жалдак М. І. Комп'ютер на уроках математики: посіб. для вчителів Київ: Техніка, 1997. 304 с.
96. Жалдак М. І., Горошко Ю. В, Вінниченко Є. Ф. Математика з комп'ютером: посіб. для вчителів 2-ге вид. Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2009. 282 с.
97. Жалдак М.І., Лапінський В.В, Шут М.І. Комп'ютерно-орієнтовані засоби

навчання математики, фізики, інформатики: посіб. для вчителів. Київ: НПУ імені М.П.Драгоманова. 2004. 182 с.

98. Заброцький М. М. Основи вікової психології: навч. посібник. Тернопіль: Навчальна книга. Богдан, 2009. 112 с.

99. Зайченко І. В. Педагогіка: навч. посіб. для студентів ВНЗ. Чернігів: Деснянська правда, 2003. 528 с.

100. Зайцева Т.В. Розвиток розумової діяльності при вивченні алгебри і початків аналізу з використанням нових інформаційних технологій: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. / НПУ ім. М.П. Драгоманова. Київ. 2000. 215 с.

101. Занков Л. В. Наглядность и активизация учащихся в обучении. Москва: Учпедгиз, 1960. 175 с.

102. Закон України «Про освіту».URL:https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/BOOKLETTE_INFO-ZAKON2018_PRESS.pdf (дата звернення: 15.01.2018)

103. Запобігання математичним помилкам учнів: метод. рекомендації. Київ: Радянська школа, 1989. 88 с.

104. Захарова А. В., Боцманова М. Э. Особенности рефлексии как психологического новообразования в учебной деятельности. *Формирование учебной деятельности школьников* / под ред. В. В. Давыдова, А. К. Маркова. Москва: Просвещение, 1982. С. 152–163.

105. Зенько С. И. Предупреждение математических ошибок учащихся 5-7 классов при обучении в подвижных группах: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Минск, 2009. 30 с.

106. Зимняя И. А. Педагогическая психология. Учебник для вузов. Москва: Логос, 1999. 384 с.

107. Зязюн І. А. Освітні технології у вимірах педагогіки рефлексії. *Світло*. 1996. № 1. С. 7– 15.

108. Ильина Т.А. Структурно-системный подход в обучении. Москва: Знание, 1972. 72 с.

109. Ингенкамп К. Педагогическая диагностика. Москва: Педагогика, 1991. 169 с.
110. Икрамов Дж. Устойчивые ошибки учащихся восьмилетней школы, допускаемые в процессе решения геометрических задач на доказательство: автореф. дис. канд. пед. наук. Ташкент, 1967. 17с.
111. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2015. 256с.
112. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2016. 272с.
113. Істер О. С. Алгебра: підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ: Генеза, 2017. 264 с.
114. Кабанова-Меллер Е. Н. Учебная деятельность и развивающее обучение. Москва: Знание, 1981. 96 с.
115. Кабанова-Меллер Е. Н. Формирование приемов умственной деятельности и умственное развитие учащихся. Москва: Знание, 1968. 288 с.
116. Калмыкова З. И. Психологические предпосылки развивающего обучения. *Физика в школе*. 1991. №3. С.69–73.
117. Киверялг А. А. Методы исследования в профессиональной педагогике. Таллинн: Валгус, 1980. 334 с.
118. Кирилецкий И. М. Анализ и предупреждение типичных ошибок учащихся при изучении алгебры и начал анализа: дис. канд. пед. наук: 13.00.02 Киев, 1986. 211 с.
119. Колосова В. А. Совершенствование системы методической работы с математическими ошибками школьников(на материале курса математики 5-6 классов средней школы): дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Арзамас, 1997. 192 с.
120. Колягин Ю. М. Методика викладання математики в середній школі. Москва: Просвещение, 1999. 322 с.
121. Коменский Я. А. Избранные педагогические сочинения. Москва: Учпедгиз, 1955. 655 с.

122. Конаржевский Ю. А. Анализ урока. Москва: Педагогический поиск, 2000. 336 с.
123. Кондаков Н. И. Ошибка. Логический словарь-справочник. Изд. 2-е, дополн. Москва: Наука, 1975. С. 426–428.
124. Кондратьєва О. М. Методична система контролю і коригування знань та умінь студентів технічних спеціальностей у процесі навчання вищої математики: автореф. дис. на здобуття наук. ступеня канд. пед. наук : 13.00.02.теорія та методика навчання математики. Київ, 2006. 19 с.
125. Кондрашова Л. В. Превентивная педагогика: учебное пособие для студ.высш. учеб. заведений. Київ: Вища школа, 2005. 231 с.
126. Концепція Державної цільової програми підвищення якості шкільної природничо-математичної освіти на період до 2015 року. *Математика в школі*. 2010. № 11. С. 3–4.
127. Коновець С. Креативні технології у практиці сучасної школи. *Рідна школа*. 2005. №3. С. 20–29.
128. Костюк Г. С. Навчально-виховний процес і психічний розвиток особистості. Київ: Радянська школа, 1989. 608 с.
129. Котенко В. В. Рефлексивная задача как средство повышения обучаемости школьников в процессе изучения базового курса информатики: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Омск, 2000. 16 с.
130. Краевский В., Хуторской А. Основы обучения. Дидактика и методика: пособие для студентов высших учебных заведений. Москва: Академия, 2007. 352 с.
131. Крамаренко Т. Г. Використання ІКТ в навчанні математики. *Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції «Проблеми математичної освіти»* (ПМО–2007). Черкаси: вид-во ЧНУ ім. Б. Хмельницького, 2007. С. 53–54.
132. Крамор В. С., Рябчинская В. Д. Формирование алгоритмической культуры учащихся. Москва: Просвещение, 1985. 186 с.
133. Критерії оцінювання навчальних досягнень з математики в системі загальної середньої освіти. *Математика в школі*. 2000. № 6. С. 2–7.

134. Крутецкий В. А. Основы педагогической психологии. Москва: Просвещение, 1972. 255 с.
135. Крутецкий В. А. Психология математических способностей школьников. Москва: Просвещение, 1968. 431 с.
136. Крутецкий В. А., Лукин. Н. С. Психология подростка. Москва: Просвещение, 1965. 316 с.
137. Кудрявцев Л. Д., Кирилов А. И., Бурковская М. А., Зими́на О. В. О тенденциях и перспективах математического образования. URL: http://www.academiaxxi.ru/Meth_Papers/Paper2.htm(дата звернення 23.01.2018)
138. Кузьмина Н. В. Методы системного исследования педагогической деятельности: учеб. пособ. Ленинград: ЛГУ, 1980. 172 с.
139. Кузьмінський А. І., Омеляненко С. В. Технологія і техніка шкільного уроку: навч. посіб. Київ: Знання, 2010. 335 с.
140. Леонтьев А. Н. Деятельность. Сознание. Личность. Изд. 2-е. Москва: Политиздат, 1977. 304 с.
141. Леонтьева М. Р., Суворова С. Б. Упражнения в обучении алгебре. Москва: Просвещение, 1985. 128 с.
142. Лернер И. Я. Дидактические основы методов обучения. Москва: Просвещение, 1981. 186 с.
143. Литцман В. Где ошибка? Москва: Физматгиз, 1962. 192 с.
144. Лында А. С. Дидактические основы формирования самоконтроля в процессе самостоятельной учебной работы учащихся. Москва: Высшая школа, 1979. 176 с.
145. Ляшенко О. І. Якість освіти як основа функціонування й розвитку сучасних систем освіти. *Педагогіка і психологія*. 2005. № 1 (46). С. 5–12.
146. Лященко Е. И. Повышение эффективности обучения математике учащихся средних школ. Минск: Нар. асвета, 1969. 96 с.
147. Львов М., Львова Н. Алгебра з комп'ютером: посібник. Київ: Шкільний світ, 2008. 126с.

148. Маделян Г. А. Психологический анализ ошибок при решении арифметических задач учащихся V-VI классов. *Известия АПН РСФСР*, 1955. Вып.71. С.149–190.
149. Мадера А.Г. Математические софизмы: правдоподобные рассуждения, приводящие к ошибочным утверждениям: кн. для учащихся 7-11 кл. Москва: Просвещение, 2003. 112 с.
150. Мадзігон В. М., Лапінський В. М., Дорошенко Ю. О. Педагогічні аспекти створення і використання електронних засобів навчання. *Проблеми сучасного підручника*: зб. наук. праць. Київ: Педагогічна думка, 2003. № 4. С. 70 – 81.
151. Майергойз Д. М. К изучению математических ошибок учащихся. *Математика в школе*. 1950. № 1. С.15–24.
152. Майкова Н. С. Провоцирующие задачи как средство предупреждения ошибок учащихся при обучении геометрии: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Санкт-Петербург, 2009. 20 с.
153. Мала Н. Розвиток мислення учнів на уроках математики. *Математика в школі*. 2002. № 5. С. 26–27.
154. Малыхина Л. И. Формирование приёмов мыслительной деятельности школьников как необходимое условие воспитания их активности и самостоятельности. *Дидактика математики: проблемы і дослідження*: міжнар. зб. наук.робіт. Донецьк :ТЕАН, 2000. №. 3 (13). С. 53–61.
155. Манвелов С. Г. Задания по математике на развитие самоконтроля учащихся. Москва: Просвещение, 1997. 98 с.
156. Маркова А. К. Формирование мотивации учения: книга для учителя Москва, 1990. 192с.
157. Марнянский И. А. Пути преодоления устойчивых ошибок в функциональной подготовке учащихся средней школы: автореф. дис. канд. пед. наук. Москва, 1967. 16 с.

158. Математика. Комплексне видання: довідник з математики 5-11 класи, аналіз найпоширеніших помилок; типові тестові завдання / О. С. Будна [та ін.]. Харків: Літера ЛТД, 2010. 320 с.
159. Матюхина М. В. Мотивация учения младших школьников. Москва: Педагогика, 1984. 144 с.
160. Менчинская Н., Моро М. И. Вопросы методики и психологии обучения арифметике в начальных классах. Москва: Просвещение. 1965. 223 с.
161. Менчинская Н. А. Психологические проблемы активности личности в обучении: [Хрестоматия по возрастной и педагогической психологии] / Ред. И. И. Ильясов, В. Я. Ляудис Москва: Изд-во МГУ, 1981. С. 153–159.
162. Менчинская Н. А. Проблемы учения и умственного развития школьника: избранные психологические труды. Москва: Педагогика, 1989. 224 с.
163. Менчинская Н. А. Пути повышения успеваемости по математике. Москва: Изд.-во АПН РСФСР, 1955. 168 с.
164. Метельский Н. В. Пути совершенствования обучения математике: Проблемы совершенствования методики математики. Минск: Университетское, 1989. 158 с.
165. Методика викладання математики в середній школі: (навч. посібник для пед. інститутів за спец. «Математика» і «Фізика»: пер. з рос. / Блох О. Я. та ін. упоряд.: Черкасов Р. С., Столяр А. А. Харків: Основа, 1992. 304 с.
166. Методика викладання математики. Практикум / За ред. Г.П. Бевза. Київ: Вища школа, 1981. 200 с.
167. Мехед Д. Б., Мехед О. Б. Корекційний контроль як фактор підвищення якості навчання. *Вісник Чернігівського державного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки*: збірник. Чернігів: ЧДПУ імені Т. Г. Шевченка, 2009. Вип. № 72. С. 83–86.
168. Михалін Г. О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу: монографія. Київ: НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. 320 с.

169. Моденов П. С. Экзаменационные задачи по математике с анализом их решения. Москва: Просвещение, 1969. 351 с.
170. Мойсеюк Н. Є. Педагогіка : навчальний посібник. Київ: Наука, 2003. 615 с.
171. Момот Л. Л. Проблема розвитку інтелектуальної інтуїції учнів у навчанні. *Педагогіка та психологія*. 1995. № 3. С. 29.
172. Мор Г.А. Формирование навыков самоконтроля и взаимоконтроля у учащихся. *Начальная школа*. №10. 1988. С. 4–9.
173. Морзе Н. В. Система методичної підготовки майбутніх вчителів інформатики в педагогічних університетах: дис. докт. пед. наук: 13.00.02 / Нац. пед ун-т імені М. П. Драгоманова. Київ, 2003. 452 с.
174. Музиченко С. А. Конструктивні задачі у шкільному курсі алгебри. *Математика в школі*. 2006. № 2. С. 28–35.
175. Муханов А. Т. Пути преодоления устойчивых ошибок в математической подготовке выпускников средней школы (на материале подготовительных отделений технических вузов): автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 Ташкент, 1975. 35 с.
176. Найн А. Я. Педагогические инновации и научный эксперимент // Педагогика. – 1996. - № 5. С.10- 15.
177. Нелін Є. П. Алгебра в таблицах (з додатком): навч. посіб. для уч. 7-11 класів. Харків: Світ дитинства, 1998. 116 с.
178. Нелін Є. П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 класу загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень. Харків: Гімназія, 2010. 416 с.
179. Нелін Є. П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту): підруч. для 10 класу закл. загальної. серед. освіти. Харків: Ранок, 2018. 328 с.
180. Неліна О. Є. Використання орієнтовних основ дій при формуванні прийомів навчальної діяльності учнів. *Засоби навчальної та науково-дослідної роботи*: збірник наукових праць / за ред. В. І. Євдокимова і О. М. Микитюка. Харків: ХДПУ, 2000. Вип. 12. С. 129–134.

181. Неліна О. Є. Застосування властивостей функцій до розв'язування рівнянь. *Додаток до навчального посібника «Алгебра в таблицях»*. Харків: Світ дитинства, 1998. С. 28–30.
182. Новиков, Д.А. Статистические методы в педагогических исследованиях (типовые случаи). Москва: МЗ-Пресс, 2004. 67 с.
183. Освітні технології : навч.-метод посіб. / О. М. Пехота [та ін.]; за ред. О. М. Пехоти. Київ: А.С.К., 2003. 255 с.
184. Овчарук О. Л. Компетентності як ключ до оновлення змісту освіти. Стратегія реформування освіти в Україні. *Рекомендації з освітньої політики*. Київ: К. І. С., 2003. С. 13–43.
185. Онищук В. А. Урок в современной школе: пособие для учителей. Москва: Просвещение, 1981. 191 с.
186. Оржеховська В. М., Пилипенко О. І. Превентивна педагогіка: навч. метод. посібник. Одеса, 2006. 78 с.
187. Осинская В. Н. Активизация познавательной деятельности учащихся на уроках математики в 9 -10 классах. Киев: Радянська школа, 1980. 143 с.
188. Осинская В. Н. Формирование умственной культуры учащихся в процессе обучения математике. Київ: Радянська школа, 1989. 188 с.
189. Павлов Ю. В. Статистическая обработка дидактического эксперимента, измерение и оценка знаний. Москва: Знание, 1977. 40 с.
190. Павлович В. С. Анализ ошибок абитуриентов по математике. Київ: Вища школа, 1975. 232 с.
191. Педагогика: учебное пособие для студентов педагогических вузов и педагогических колледжей / [ред. П. И. Пидкасистый]. Москва: Рос. Педагогическое агентство, 1995. 638 с.
192. Пидкасистый П. И. Самостоятельная познавательная активность школьников в обучении: теоретико-экспериментальное исследование. Москва: Педагогика, 1980. 240 с.
193. Підласий І. П. Як підготувати ефективний урок: кн. для вчителя. Київ: Рад. шк., 1989. 204 с.

194. Підласий І. П. Продуктивний педагог. Настільна книга вчителя. Харків: Основа, 2009. 360с.
195. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения. Москва: Наука. 1975. 462 с.
196. Поливанова К. Н. Психологическое содержание подросткового возраста. *Вопросы психологии*. 1996. № 1. С. 20–33.
197. Пономарев Я. А. Знания, мышление и умственное развитие Москва: Просвещение, 1967. 262. с.
198. «Про затвердження Критеріїв оцінювання навчальних досягнень учнів (вихованців) у системі загальної середньої освіти». Наказ МОНМС України № 329 від 13. 04. 2011 р. URL: [goo/gl/Su79nN/](http://goo.gl/Su79nN/)(Дата звернення: 24.03.2015).
199. Прогалини в знаннях учнів із стереометрії та їх запобігання: методичні рекомендації. Київ: Освіта, 1993. 69 с.
200. Прогалини в знаннях учнів з планіметрії та запобігання їм: методичні рекомендації. Київ: Освіта, 1991. 65 с.
201. Програма Gran1 для вивчення математики в школі й вузі / укл.: М. І. Жалдак, Ю. В. Горошко. Київ: КДПУ, 1992. 49 с.
202. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5–12 класи. Ірпінь: Перун, 2005. 64 с.
203. Програма з математики для 5–9-х класів для загальноосвітніх навчальних закладів затверджена наказом МОН від 07.06.2017 № 804. URL: <https://ru.osvita.ua/school/program/program-5-9/56128/>(дата зв.: 21.11. 2018р).
204. Прокопенко Н. С., Захарійченко Ю. О., Кінашук Н. Л. Алгебра: підручник для 8 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків: Ранок, 2016. 288 с
205. Процесс учения: контроль, диагностика, коррекция, оценка: учебно-метод. пособ. / под ред. Е.Д. Божович, Москва., Московский псих.- соц. ин-т, 1999. 213 с.
206. Психология человека от рождения до смерти: учебник / В. А. Аверин [и др.]; под. ред. А. А. Реана. Санкт-Петербург: Прайм–Евროзнак, 2006. 651 с. (Большая Университетская библиотека).

207. Психологія: підручник / [упоряд. Ю. Л. Трофімов, В. В. Рибалка, П. А. Гончарук]. Київ: Либідь, 1999. 558 с.
208. Резніченко Н. Використання психолого-педагогічних засобів для формування навчальних умінь. *Математика в школі*. 2002. № 5. С. 27–30.
209. Рубинштейн С. Л. О мышлении и путях его исследования. Москва: Изд-во АН СССР, 1958. 147 с.
210. Рубинштейн С. Л. Процесс мышления и закономерности анализа, синтеза и обобщения. Экспериментальные исследования. Москва: Изд.-во АН СССР, 1960. 168 с.
211. Рубинштейн С. Л. Основы общей психологии. Санкт-Петербург: Питер, 2002. 720 с.
212. Руденко В. М. Математична статистика. Навч. посіб. Київ: Центр учбової літератури, 2012. 304 с.
213. Румшинский Л. З. Математическая обработка результатов эксперимента. Москва: Наука, 1971. 192 с.
214. Рыжик В. И. Формирование потребности в самоконтроле при обучении математике. *Математика в школе*. 1980. № 3. С. 12–19.
215. Савич Є. Ф. Рівняння і нерівності у восьмирічній школі. *Методика викладання математики: практикум* / За ред. Г. П. Бевза. Київ: Вища школа, 1981. С. 91–97.
216. Самарин Ю. А. Очерки о психологии ума: особенности умственной деятельности школьников. Москва: АПН РСФСР, 1962. 504 с.
217. Самусенко А. В., Казаченко В. В. Математика: Типичные ошибки абитуриентов. Минск: Высш. шк., 1991. 189 с.
218. Саранцев Г. И. Применение карточек при обучении доказательству. *Математика в школе*. 1976. №3. С. 8–10.
219. Селевко, Г. К. Энциклопедия образовательных технологий: в 2-х т. Москва: НИИ школьных технологий, 2006. 816 с.

220. Сергєєнкова О. П. Вікова психологія: навч. посіб. / О. П. Сергєєнкова, О. А. Столярчук, О. П. Коханова, О. В. Пасєка. Київ: Центр учбової літератури, 2012. 384 с.
221. Сиротюк А. Л. Природосообразность обучения: дифференцированный или холистический подходы? *Народное образование*. 2005. №1. С. 117–124.
222. Серікова Ж. Розвиток самоконтролю учнів на уроках математики. *Математика в школі*. 2006. № 5. С. 43–47.
223. Сікорський П. Психолого-педагогічні проблеми навчання математики. *Математика в школі*. 2004. № 4. С. 5–10.
224. Скаткин М. Н. Проблемы современной дидактики. Москва: Педагогика, 1980. 96 с.
225. Скаткин М. Н. Совершенствование процесса обучения. Москва: Педагогика, 1971. 206 с.
226. Скафа Е. И. Эвристическое обучение математики: теория, методика, технология: [монографія]. Донецк: Изд-во ДонГУ, 2004. 439 с.
227. Скафа Е. И. Проблемные ситуации как средство развития интереса к математике. *Эвристики и дидактика точных наук*. 1993. № 1. С. 13–21.
228. Скрипченко О. В., Долинська Л. В., Огороднійчук З. В. Вікова та педагогічна психологія: навч. посіб. Київ: Просвіта, 2001. 416 с.
229. Скрыпник Д. А. Математические ошибки в рассуждениях, их предупреждение и методика исправления: автореф. дис. канд. пед. наук. 13.00.02 Киев, 1971. 23 с.
230. Слепкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики. Тернопіль: Підручники і посібники, 2006. 240 с.
231. Слепкань З. І. Методика навчання математики: підручник для студ. матем. спец. пед. навч. закл. Київ: Вища шк., 2006. 582 с.
232. Сманцер А. П., Рангелова Е. М. Превентивная педагогика: методология, теория, методика. Минск: БГУ, 2008. 262 с.

233. Смирнов А. А. Проблемы психологии памяти. Москва: Просвещение, 1966. 324 с.
234. Сохор А. М. Логическая структура учебного материала. Вопросы дидактического анализа. Москва: Педагогика, 1974. 192 с.
235. Столяр А. А. Педагогика математики. Учеб. пособие для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. Минск: Вышэйшая школа, 1986. 414 с.
236. Сухомлинский В. А. О воспитании. Москва: Просвещение, 1979. 78 с.
237. Талызина Н. Ф. Педагогическая психология. Москва: Академия, 1998. 288 с.
238. Талызина Н. Ф. Управления процессом усвоения знаний. Москва: Изд. Моск. ун-та, 1975. 344 с.
239. Тарасенкова Н. А. Використання знаково-символьних засобів у навчанні математики. Черкаси : Відлуння-Плюс, 2002. 400 с.
240. Тарасенкова Н. А. Прийом візуалізації помилок як спосіб оперативного коректування знань учнів під час усного опитування. *Математика в школі*, 2002. № 3. С. 32–35.
241. Тарасенкова Н. А. Найти ошибку. *Математика в школе*. 1997. № 2. С. 31–34.
242. Тарасова О. А. Предупреждение типичных ошибок учащихся в процессе обучения алгебре посредством формирования и использования рефлексивной деятельности: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Новосибирск, 2004. 27 с.
243. Таточенко В. І. Актуальні проблеми невстигання учнів в процесі навчання математики. *Дидактика математики: проблеми і дослідження*: між нар. збірник наук. робіт. 2006. № 25. С. 66–74.
244. Триус Ю. В. Комп'ютерно-орієнтовані методичні системи навчання математики: Монографія. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 400 с.
245. Тупиков В. А. Ошибки в решении конкурсных задач на вступительных экзаменах по математике. 3-е изд. стереотип. Москва: Высшая школа, 1972. 88 с.

246. Фіцула М. М. Педагогіка: навч. посіб. для студ. вищих пед. закладів освіти. Київ: Академія, 2002. 528 с.
247. Формирование приемов математического мышления / под ред. Н. Ф.Талызиной. Москва: Вентана-Граф, 1995. 231 с.
248. Фридман Л. М. Педагогический опыт глазами психолога: книга для учителя. Москва: Просвещение, 1987. 224 с.
249. Фридман Л. М. Психологическая наука – учителю. Москва: Просвещение, 1985. 145 с.
250. Фридман Л. М. Психология детей и подростков: справочник для учителей и воспитателей. Москва: Изд-во Ин-та психотерапии, 2003. 480 с.
251. Фридман Л. М., Волков, К. Н. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе: учителю математики о педагогической психологии. Москва: Просвещение, 1983. 160 с.
252. Фридман Л. М. Психолого-педагогические основы обучения математике в школе. Москва: Просвещение, 1983. 160 с.
253. Фридман Л.М. Учитесь учиться математике. Москва: Просвещение, 1985. 112 с.
254. Фройденталь Г. Математика как педагогическая задача: пособие для учителей. Ч. I. / Под ред. Н. Я.Виленкина; сокр. пер. с нем. А. Я. Халамайзера. Москва: Просвещение, 1982. 208 с.
255. Хазанкин Р. Г. Как увлечь учеников математикой. *Народное образование*. 1987. № 10. С. 46–49.
256. Харламов И.Ф. Как активизировать учение школьников. Минск: Народна асвіта, 1975. 207 с.
257. Черкаська Л. П. Методика контролю та корекції навчальних досягнень з математики учнів основної школи: автореф. дис. канд. пед. наук: 13.00.02 / Черкас. нац. ун-т ім. Б. Хмельницького. Черкаси, 2009. 20 с.
258. Шамова Т. И. Активизация учения школьников. Москва: Педагогика, 1979. 208 с.

259. Шве́ц В. А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы : автореф. дис канд. пед. наук: 13.00.02. Киев, 1988. 18 с.
260. Шве́ц В.А. Реализация функций тематического контроля результатов обучения учащихся математике в старших классах средней школы: дис. канд. пед. наук: 13.00.02. Киев, 1988. 209 с.
261. Шве́ць В., Дремова І. Планування і організація тематичного контролю результатів навчання алгебри в основній школі. *Математика в школі*. 2002. № 3. С. 25–29.
262. Шеварев П. А. О роли ассоциаций в процессах мышления. *Исследование мышления в советской психологии*. Москва: Наука, 1966. С. 388–436.
263. Шеварев П. А. Обобщенные ассоциации в учебной работе школьника Москва: Изд-во АПН РСФСР, 1959. 303с.
264. Шеварев П. А. Опыт психологического анализа алгебраических ошибок. *Известия АПН РСФСР*, 1946. № 3. С. 135–180.
265. Щукина Г. И. Роль деятельности в учебном процессе. Москва: Просвещение, 1986. 143 с.
266. Щукина Г. И. Педагогические проблемы формирования познавательных интересов учащихся. Москва: Педагогика, 1988. 203 с.
267. Щукина Г. И. Роль деятельности в учебном процессе. Москва: Педагогика, 1976. 142 с.
268. Эрдниев П.М. Сравнение и обобщение при обучении математике. пособие для учителей. Москва: Учпедгиз, 1960. 152 с.
269. Эрдниев П. М., Эрдниев Б. П. Укрупнение дидактических единиц в обучении математике: кн. для учителя. Москва: Просвещение, 1986. 255 с.
270. Эльконин Д. Б. О структуре учебной деятельности. *Избранные психологические труды*. Москва: Педагогика, 1989. 560с. С.250–251.
271. Якиманская И. С. Знания и мышление школьника Москва: Знание, 1985. 78 с.

272. Якиманская И. С. Личностно ориентированное обучение в современной школе. Москва: Сентябрь, 1996. 96 с.
273. Якиманская И. С. Психолого-педагогические проблемы дифференцированного обучения. *Советская педагогика*. 1991. №3 С. 16–22.
274. Якиманская И. С. Развивающее обучение. Москва: Педагогика, 1979. 144 с.
275. Якунин В. А. Педагогическая психология: учеб. пособие. Санкт-Петербург: Изд-во Михайлова В. А., 2000. 349 с.
276. Український центр якості освіти. Режим доступу: <http://testportal.gov.ua/ofzvit/>

ДОДАТКИ**Додаток А****Анкета для вчителів**

1. Вкажіть свій педагогічний стаж.
2. В яких класах Ви викладаєте алгебру?
3. Ви проводите роботу над помилками учнів:
 - а) іноді, за необхідності;
 - б) постійно, на кожному уроці;
 - в) після написання контрольних робіт;
 - г) свій варіант відповіді.
4. Яким напрямом роботи з помилками учнів Ви надаєте перевагу?
 - а) попередження помилок ;
 - б) виправлення помилок за наслідками контрольної роботи;
 - в) виправлення помилок під час усних відповідей учнів;
 - г) виправлення помилок за наслідками виконання домашнього завдання;
 - д) інший варіант відповіді.
5. В діяльності по виправленню помилок Ви надаєте перевагу:
 - а) фронтальній роботі;
 - б) індивідуальній роботі;
 - в) колективній роботі;
 - г) роботі в групах;
 - д) виконанню індивідуальних домашніх завдань;
 - е) свій варіант відповіді.
6. Якому методу роботи над помилками Ви надаєте перевагу:
 - а) виявлення та виправлення помилок;
 - б) пояснення причини появи помилки;
 - в) використання контрприкладів для виправлення помилок;
 - г) попередження про можливість помилки;
 - д) демонстрація помилки;

г) свій варіант відповіді.

7. Які засоби попередження помилок Ви використовуєте?

а) формування навичок самоконтролю;

б) виховання необхідності пояснення кожної дії;

в) розв'язування спеціальних задач, наприклад, розбір математичних софізмів;

г) свій варіант відповіді (з детальним поясненням).

8. Ваше відношення до помилки:

а) надаєте можливість учню самому виправити помилку;

б) помилку виправляють інші учні;

в) помилка виправляється учителем;

г) свій варіант відповіді.

9. Як на Вашу думку, аналіз помилок учнів:

а) необхідний;

б) можливий, але не обов'язковий;

в) здійснюється рідко, час від часу;

г) не потрібний;

д) свій варіант відповіді.

10. Труднощі, що виникають в діяльності з помилками учнів:

а) недостатність (відсутність) методичного забезпечення;

б) недостатність спеціальних дидактичних матеріалів;

в) недосконалість методичних та дидактичних матеріалів;

г) брак часу на здійснення корекції знань і вмінь учнів;

д) свій варіант відповіді.

Математичний диктант.**Властивості степеня з натуральним показником****Варіант 1**

1. Запишіть добуток сьомого та п'ятого степенів числа m . Подайте одержаний вираз у вигляді степеня.
2. Запишіть степінь, який утвориться, якщо вираз x^2 піднести до п'ятого степеня.
3. Подайте у вигляді добутку степенів сьомий степінь добутку чисел 11 і 19.
4. Запишіть у вигляді степеня вираз $6^{12} \cdot 11^{12}$.
5. Подайте у вигляді степеня числа 7 частку $7^{25} : 7^8$.
6. Число a від'ємне. Який знак має число a^{14} ?
7. Чи є тотожно рівними вирази: $7a - 2a$ і $9a$?

Варіант 2

1. Запишіть добуток сьомого та третього степенів числа c . Подайте одержаний вираз у вигляді степеня.
2. Запишіть степінь, який утвориться, якщо вираз c^2 піднести до шостого степеня.
3. Подайте у вигляді добутку степенів п'ятий степінь добутку чисел 7 і 13.
4. Запишіть у вигляді степеня вираз $7^{13} \cdot 10^{13}$.
5. Подайте у вигляді степеня числа 4 частку $4^{24} : 4^{13}$.
6. Число b від'ємне. Який знак має число b^{17} ?
7. Чи є тотожно рівними вирази: $5m - m$ і $6m$?

Система вправ на попередження помилок під час вивчення теми

«Винесення спільного множника за дужки»

1. *Вправи на визначення рівня підготовки учнів до сприйняття нового матеріалу:*

1. Розкрийте дужки: а) $3a(7a - 6ab)$; б) $ax^2(2x + 1 + a)$;

2. Запишіть вираз у вигляді многочлена стандартного виду:

а) $12f - 4 - 5(f + 6 - 7f^2) + 6(f^2 - 4f + 7)$; б) $-h + 5g - 4 + (-h) + 4g + 3 \cdot (-9)$.

3. Знайти різницю алгебраїчних виразів:

а) $-k^2$ і $5k^2l - k^2$; б) $-k^2$ і $-5k^2l + k^2$.

4. Запишіть многочлен $5n^3 - 7n^6 - 9n^2 - 3$ у вигляді:

а) суми одночлена і тричлена; б) різниці двочлена и двочлена.

5. Представте одночлен $-12xy^3$ у вигляді добутку двох одночленів, один з яких дорівнює: а) $6y^2$; б) $-4xy$; в) $3xy^3$; г) 12.

6. Замість крапок запишіть одночлени так, щоб одержалась правильна рівність:
 $11a^2b^4(\dots - 2a^2b^4 + \dots) = -33a^3b^5 - 22a^4b^5 + 55a^2b^9$.

2. *Вправи для безпосереднього сприйняття нового матеріалу та первинного закріплення одержаних знань.*

1. Обчисліть, використовуючи розподільну властивість множення:

а) $28 \cdot 4 + 28 \cdot 5$; б) $-65 \cdot 4 + 40 \cdot 4$; в) $-80 \cdot 7 - 60 \cdot 7$; г) $134 \cdot 99 + 134 \cdot 1$.

2. Назвіть спільний множник многочлена та винесіть його за дужки:

а) $5 \cdot p + 5 \cdot 1$; б) $6 \cdot 1 - 6a$; в) $9x - 9$; г) $2a + 2b$; д) $7f - 7h$; е) $15y + 15z$.

3. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $3 \cdot 5 - 3a$; б) $3a + 15$; в) $9b - 36$; г) $48 + 12y$; д) $15 \cdot 2y - 15 \cdot 3h$; е) $6t + 8$.

4. Розкладіть на множники:

а) $1 \cdot b + ba$; б) $xy + y$; в) $z - yz$; г) $ab + ac$; д) $xb - by$; е) $zx + yz$.

5. Винесіть найбільший спільний множник за дужки:

а) $1 \cdot m - mb$; б) $m + m \cdot m$; в) $m^2 - m$; г) $b^2 - b^3$; д) $d^5 - d^4$; е) $f^6 - 4f^2$.

3. *Вправи на осмислення алгоритму розв'язування даного виду вправ та формування первинних умінь.*

1. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $2 \cdot 4y + 3x \cdot 4y$; б) $35mn - 25m$; в) $14p + 36pq$; г) $7bc - 7b$; д) $-21xy - 21y$

2. Розкладіть на множники:

а) $5a^3 a^2 - 17a^2$; б) $7a^8 + 12a^5$; в) $21m^6 + 7m^8$; г) $28x^8 - 42x^5$; д) $18t^9 - 45t^{18}$.

3. Представте у вигляді добутку многочлен:

а) $a^2 b + 12 a b$; б) $x^7 y^5 - x^4 y^3$; в) $-y^2 z + 2y^5 z^6$; г) $12 ab - ab^2 + a b^2$.

Представте у вигляді добутку одночлена і тричлена:

а) $2r^4 \cdot 7r^5 + r^2 \cdot 7r^5 - 4 \cdot 7r^5$; б) $8s^9 + 12s^7 + 8s^6$; в) $12t^{11} - 24t^5 - 6t^9$;

г) $36ab - 18ab^2 + 6a^2 b$;

5. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $5(x + y) + a(x + y)$; б) $x(a + b) - 15(a + b)$; в) $(z - y) + f(z - y)$;

г) $m(n - 9) + (n - 9)p$;

6. Розкладіть на множники:

а) $a(x - y) + (-10)(x - y)$; б) $b(x - y) + (y - x)$; в) $-1(y - z) + c(y - z)$;

г) $(z - y) + p(y - z)$.

7. Представте вираз у вигляді добутку двох двочленів:

а) $5y(p - q) - 3(q - p)$; б) $r(2z - 5h) + 3p(5h - 2z)$; в) $f^2(v - w) + g(w - v)$;

г) $q^3(7 - e) + t(e - 7)$.

4. Диференційовані вправи, спрямовані на розвиток умінь через закріплення знань.

1. Представте многочлен у вигляді добутку:

а) $14ab - 35bc$; б) $16xy + 40zn$; в) $-6hf - 18f^4$;

г) $-14p^3 - 7pq$; д) $25a + 15b - 20ab$; е) $8xy - 17xy^2 + 16x^2y^2$;

ж) $14a^2z - 28abz + 14b^2z$; з) $8n^2m^2 - 8nm^2 + 24m^2d$; и) $-8s^2t^3 - 72s^4t^4 - 12ts^6$.

2. Розкладіть на множники:

а) $c(x - y) - (x - y)$; б) $a(5t + 4) + b(5t + 4) - c(5t + 4)$;

в) $-8h^2(a - 2b + c) - 3z^3(a - 2b + c)$;

г) $(m + n) - a(m + n)$; д) $6x(3k - 2q) + 7y(3k - 2q) - 2d(3 - 2q)$;

е) $-4p(a^2 - ab + b^2) + 8q(a^2 - ab + b^2) - 32(a^2 - ab + b^2)$;

є) $2(p + q) + b(p + q) - (p + q)$;

ж) $9(3a + 2 - a^2) + 8a^2(3a + 2 - a^2) - 11a(3a + 2 - a^2)$;

з) $m(a + b)(c + d) + (a + b)q(c - d) - (a + b)(c - d)y$.

3. Заповніть пропуски так, щоб утворився вираз тотожно рівний многочлену :

$-28a^3b^5 + 14a^6b^3 - 7a^2b^2 + 35a^3b^4$:

а) $14a^3b^3 \cdot (\dots + \dots) - 7a^2b^2 + 35a^3b^4$; б) $-28a^3b^5 + 7a^2b^2 \cdot (\dots - \dots) + 35a^3b^4$;

в) $-28a^3b^5 + 14a^6b^3 - 7a^2b^2 \cdot (\dots - \dots)$;

г) $7a^2b^2 - \dots + \dots - \dots + 35a^3b^4$; д) $-28a^3b^5 - 7a^2b^2 - (\dots + \dots - \dots)$.

4. Заповніть пропуски так, щоб утворився вираз тотожно рівний многочлену

$36x^7y^5 - 27x^5y^4 + 45x^3y^6 - 9x^3y^4$:

а) $\dots \cdot (4x^2y - 3) + 45x^3y^6 - 9x^3y^4$; б) $36x^7y^5 - \dots \cdot (3x^2 - 5y^2) - 9x^3y^4$;

в) $36x^7y^5 - 27x^5y^4 + \dots \cdot (5y^2 - 1)$;

г) $\dots \cdot (4x^3y - 3x^2 + 5y^2) - 9x^3y^4$; д) $36x^7y^5 + \dots \cdot (3x^2 - 5y^2 + 1)$;

е) $\dots \cdot (4x^2y - 3) + \dots \cdot (5y^2 - 1)$;

є) $-27x^5y^4 + \dots \cdot (4x^3y + 5y^2 - 1)$.

5. Спростіть вираз:

а) $12i + j + 12i - j$; б) $-x^2(5y + 2) + (2y + 5)x^2$; в) $(a + b)(2c - 3) - (a + b)(5c - 4)$;

г) $3fq(2f - q) + 3fq(f + 2q)$; д) $-8h^2p(a^2 + 6d) + (6a^2 + d)8hp$;

е) $(m - n)(9k + 7) - (m - n)(15 - 3k)$; є) $6a^2(9 - 4b^3) + 6a^2(4 + 9b^3)$;

ж) $-11s^3t^4(2s^2 + 3t^3) + (3s^2 + 2t^3)11s^3t^4$; з) $(3y + x)(12y - 9x) - (3y + x)(9y + 10x)$;

6. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $(a + b)(a + b) - 2(a + b)$; б) $b(c - d) + (c - d)^2$; в) $17(e - 6f) - (e - 6f)^2$;

г) $5m(s - t) + (s - t)(s - t)$; д) $(p + 2a^2) - 14s^3(p + 2a)$; е) $-21ij(4ij + 13) + (4ij + 13)^2$;

є) $(x + z)^2 - 15v(x + z)$; ж) $-29w^5(19 - 3m) - (19 - 3m)^2$; з) $(-sr^2 + 3n)^2 + 4(-sr^2 + 3n)$;

7. Представте многочлен у вигляді добутку:

а) $(a + b)^2 + (a + b)^3$; б) $2(t - 3x)^4(9i^2 - 2)^2(t - 3x)^3$; в) $(f^2 + h^2)^2 - (f^2 + h^2)^2g$;

г) $(m - 3n)^4 + (m - 3n)^3$; д) $d(a + b)^3 - (a + b)^2$; е) $p^3 + 64^3 - (p^3 + 64^3)(1 - q^2)$;

є) $(9i^2 - 2)^2 + (9i^2 - 2)^4$; ж) $(s^3 - y^3)^3 - (s^3 - y^3)^4$; з) $(z^6 + 1)(36 - z^5)^6 - (36 - z^5)^6$.

8. Винесіть спільний множник за дужки:

а) $4(p - q) - 3(q - p)$; б) $(a - b)^2 + (b - a)$; в) $14s(r - b) - (b - r)^2$;

г) $m(a - b) + 3(a - b) + 7n(b - a)$; д) $(m - n)^2 - n - m$; е) $13t(x - y)^3 - (y - x)^2$;

є) $5(p-q) - 3d(p-q) + 6(q-p)$; ж) $4(x-y)^2 + 3(y-x)$; з) $31(m-n)^3 + 12(n-m)^2$.

5. Вправи, спрямовані на формування навичок розкладання многочлена на множники шляхом винесення спільного множника за дужки.

1. Представте многочлен $4a(b-c) + 3b(c-b) + 2c(b-c)$ у вигляді добутку та знайдіть значення виразу, якщо $a=4,25$; $c=-2$; $b=6\frac{2}{3}$.

2. Розв'яжіть рівняння: а) $x^2 + 6x = 0$; б) $y(y-3) - 5y = 0$.

3. За яких значень змінних однакові значення виразів:

а) $5z(z+4)$ та $10(z+4)$; б) $6x(5x-3)$ та $12(3-5x)$.

4. Доведіть тотожність:

$$16xy - 16xy(x^2 - 1) = 3x - 2y(4x^3 - 8x) - 3x + 2y(4x^3 - 8x).$$

5. Довести, що значення виразу $59^7 + 59^8$ ділиться на 60.

Додаток Д

**Приклади завдань на засвоєння способу розкладання
многочленів на множники за формулою:**

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

1. Запишіть у вигляді квадрата одночлена вирази:

$$64; b^6; 16a^2; a^2b^2; 25m^4n^2; 1,44y^{10}x^6; 36a^4b^2c^8; 0,25x^{14}y^{12}z^{18}.$$

2. Розкладіть з використанням попередніх результатів на множники вирази:

$$b^6 - 64; 25m^4n^2 - a^2b^2; 36a^4b^2c^8 - 64; 1,44y^{10}x^6 - 0,25x^{14}y^{12}z^{18}.$$

3. Розкладіть на множники вирази:

$$25x^4 - 16; 0,04a^2 - \frac{9}{16}c^4; a^4 - 1; (3x + 2)^2 - 25x^2; 36a^2 - (4 + 6m)^2.$$

4. Перетворіть вираз у многочлен:

$$(d - b)(d + b); (3a + 4b)(4b - 3a); (5x + 7y)(5x - 7y); (4a - b^3)(4a + b^3).$$

5. Замініть зірочки одночленом, щоб утворилась тотожність:

$$1) (2x - 3y)(* + *) = 4x^2 - 9y^2;$$

$$2) 25m^2 - 9a^2b^2 = (5m - *)(* + *);$$

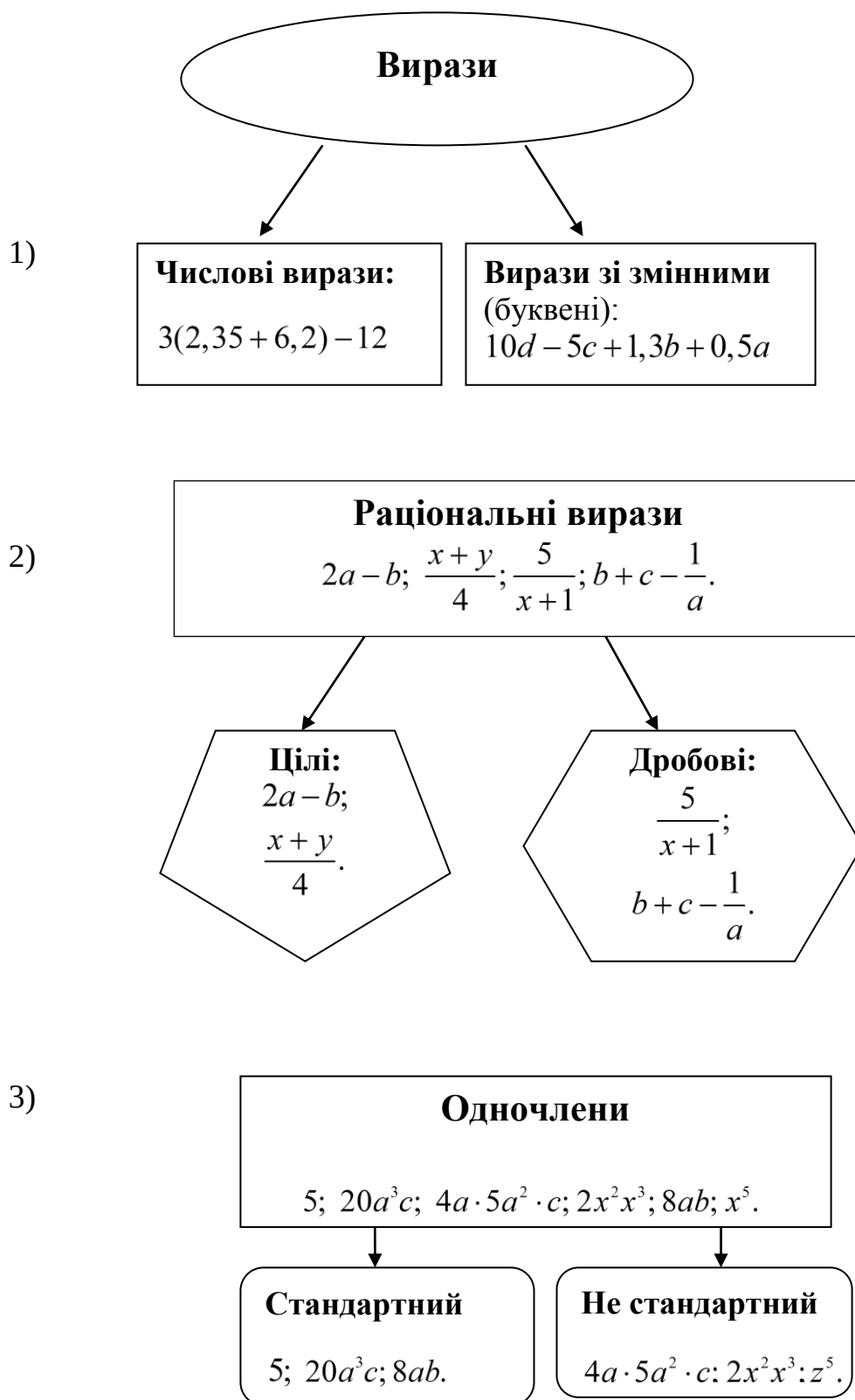
$$3) (4a - *)(* + 3x^2) = 16a^2 - 9x^4;$$

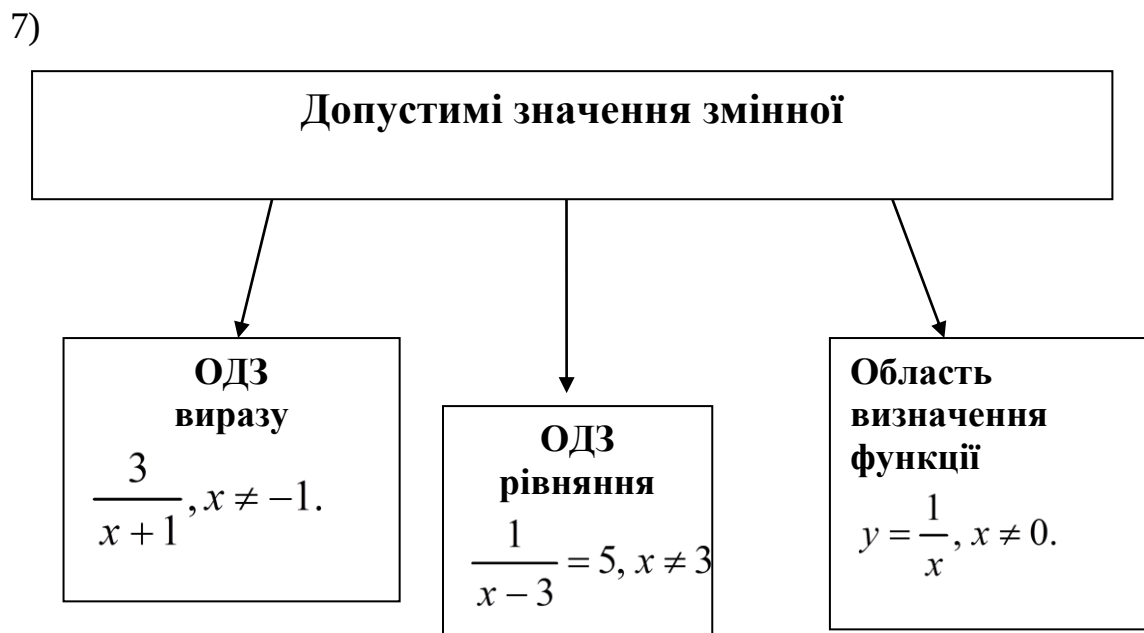
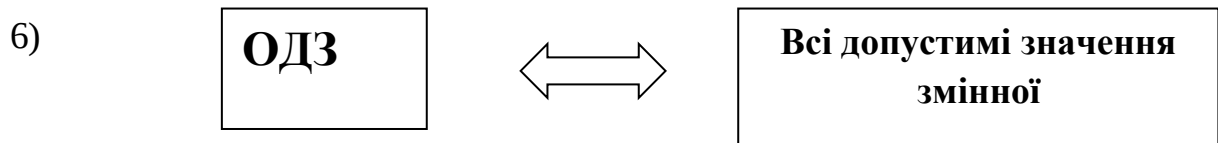
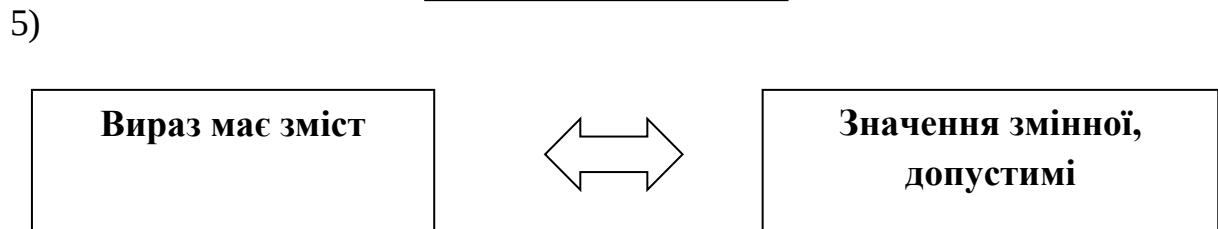
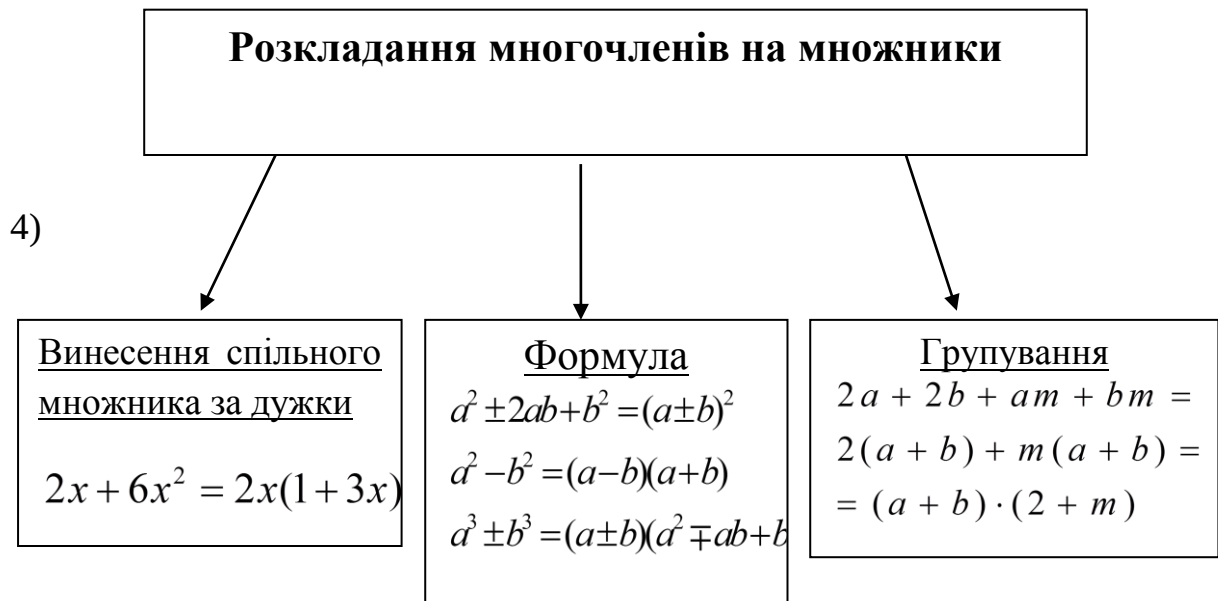
$$4) 1 - * = (1 - 4z)(* + *).$$

6. Обчисліть:

$$1) 35^2 - 15^2; 2) 136^2 - 64^2; 3) 43^2 - 27^2; 4) 51,5^2 - 49,5^2.$$

Опорні схеми:





Опорна схема скорочення раціональних дробів:

Скоротити дріб: $\frac{15 - 3x}{x^2 - 10x + 25}$



Розкладемо чисельник на множники:
 $15 - 3x = 3(5 - x)$



Розкладемо знаменник на множники:
 $x^2 - 10x + 25 = (x - 5)^2 = (5 - x)^2$



Маємо дріб: $\frac{15 - 3x}{x^2 - 10x + 25} = \frac{3(5 - x)}{(5 - x)^2}$



Знайдемо ОДЗ дробу: $x \neq 5$.



Виділимо **спільний множник** для чисельника і знаменника: $5 - x$. Скоротимо дріб на спільний множник. Маємо: $\frac{3}{5 - x}$.

Опорні конспекти

Функція $y = \sqrt{x}$, її графік і властивості

Область визначення функції $D(y)$: $x \geq 0$.

Область значення функції $E(y)$: $y \geq 0$.

Графік функції проходить через початок координат – точку $O(0;0)$.

Графік розміщений лише в I координатній чверті. Функція зростає при всіх $x \geq 0$, тобто, якщо значення x збільшується, то значення y збільшується. Наприклад: якщо $3 < 8$, то $\sqrt{3} < \sqrt{8}$.

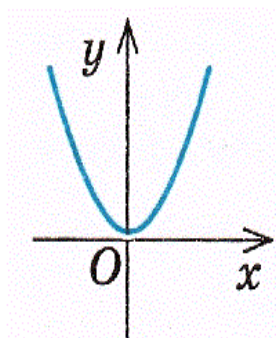
Функція $y = x^2$ її графік та властивості

Графік функції $y = x^2$ - *парабола*, її вітки є дзеркальними відображеннями відносно осі Oy ;

Графік проходить через початок координат, точка $O(0;0)$ – *вершина параболы*.

$$y = x^2$$

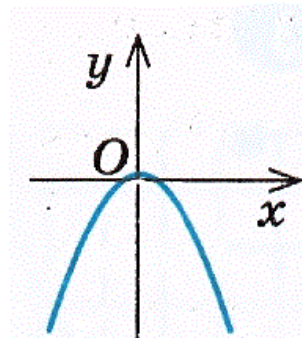
Область визначення
 $D(y)$: x – будь-яке число.



Область значень $E(y)$: $y \geq 0$
графік розташований у I і II координатних чвертях
при $x < 0$ функція спадає
при $x > 0$ функція зростає

$$y = -x^2$$

Область визначення
 $D(y)$: x – будь-яке число.



Область значень $E(y)$: $y \leq 0$
графік розташований у III і IV координатних чвертях
при $x < 0$ функція зростає
при $x > 0$ функція спадає

Раціональні вирази. Раціональні дроби

Цілий вираз – вираз, що не містить дію ділення на вираз зі змінною.

Наприклад $\frac{t+1}{5}$; -4 ; $x^2 + y^2$; $\frac{m}{2} + y^5$

Дробовий вираз – вираз, що містить дію ділення на вираз зі змінною.

Наприклад: $\frac{9}{x}$; $5y^3 + \frac{4}{y}$; $8x:(x-1)$; $\frac{a-3}{7b}$

Цілі та дробові вирази називають *раціональними виразами*

Наприклад: $4x^3 - 2x^2 + 5$; $\frac{a^3 + b^3}{8}$; $\frac{5}{x} - 3x$; $\frac{a+6}{8-a}$; $\frac{3b}{4} - \frac{b^2}{8} + \frac{6}{11}$.

Вираз має зміст, коли можна виконати всі математичні дії в даному раціональному виразі.

Дріб має зміст, коли його знаменник відмінний від нуля.

Наприклад: вираз $\frac{2x}{x-5}$ має зміст, якщо $x-5 \neq 0$, тобто $x \neq 5$.

Знаходження області допустимих значень виразу

Областю допустимих значень (ОДЗ) виразу з однією змінною називають усі значення змінної, при яких цей вираз має зміст.

Алгоритм знаходження ОДЗ виразу:

1. Прирівняти знаменники дробів, що входять у вираз, до нуля.
2. Знайти розв'язки отриманих рівнянь.
3. Записати ОДЗ, зазначивши, що отримані розв'язки до неї не входять.

Наприклад: ОДЗ виразу $\frac{x+7}{(x-2)(x+3)}$

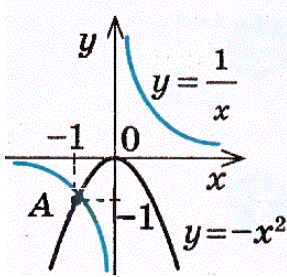
складається з таких значень x , при яких $(x-2)(x+3) \neq 0$

1. Прирівняємо знаменник до нуля:
 $(x-2)(x+3) = 0$.

2. Добуток дорівнює нулю, якщо хоча б один із множників дорівнює нулю, тоді розв'язки рівняння: $x = 2$, $x = -3$.

3. ОДЗ: $x \neq 2$, $x \neq -3$.

Розв'язування рівнянь графічним способом

Орієнтовна основа дій розв'язування рівняння графічним способом - Звести вихідне рівняння до вигляду $f(x) = g(x)$, щоб у лівій і правій його частинах були відомі функції. - Побудувати в одній системі координат графіки функцій $y = f(x)$ і $y = g(x)$ та знайти точки їх перетину. - Визначити абсциси точок перетину графіків. - Записати у відповідь наближені розвязки рівняння, наприклад: $x \approx a$ Увага! Щоб перевірити точність знайдених розвязків, потрібно підставити їх у вихідне рівняння.	Приклад розв'язання рівняння $x^2 + \frac{1}{2} = 0$ графічним способом $x^2 + \frac{1}{2} = 0; \frac{1}{x} = -x^2$ - Побудуємо графіки функцій: $y = \frac{1}{x}, y = -x^2$  - Графіки функцій $y = \frac{1}{x}$ і $y = -x^2$ перетинаються в точці $A(-1; -1)$ - Абсциса точки перетину $x = -1$ $x \approx -1$. Перевірка: $(-1) + \frac{1}{-1} = 0; 1 - 1 = 0; 0 = 0$. Отже $x = -1$
---	--

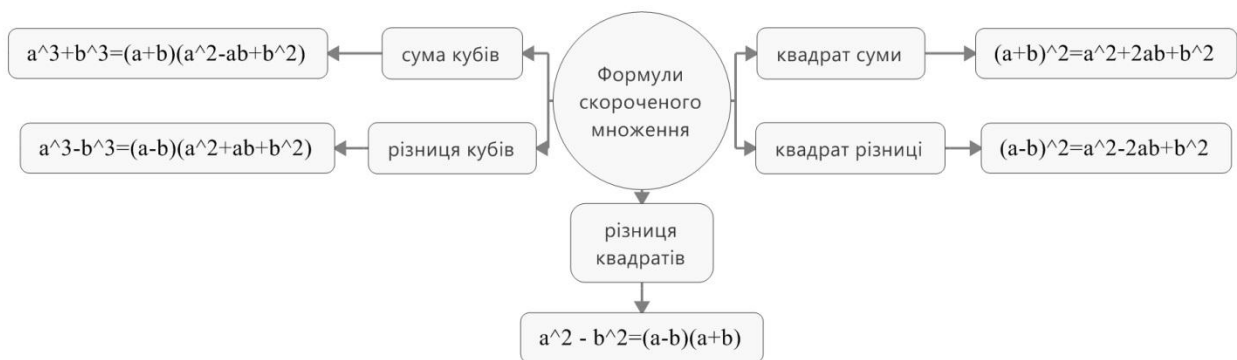
Наочне виведення формули квадрата суми двочлена та квадрата суми тричлена

	a	b
a	a ²	ab
b	ba	b ²

	a	b	c
a	a ²	ab	ac
b	ba	b ²	bc
c	ca	cb	c ²

$$(a + b)^2 = aa + ab + ba + bb = a^2 + 2ab + b^2; (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

**Карта знань, створена за допомогою
програмного засобу MindManager**



«Мозковий штурм»

1. Яку дію виконано правильно?

а) $\frac{4}{9} - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}$; б) $\frac{6}{13} - \frac{4}{7} = \frac{2}{5}$; в) $2 - \frac{7}{9} = \frac{2}{9}$. Відповідь обґрунтуйте.

2. Як перевірити правильність виконання дій в попередньому завданні?

3. Чи правильно, що в запису 3^5 , 5- степінь?

4. Знайдіть та виправте помилки:

а) $3^2 \cdot 3^4 = 3^8$; б) $(3m)^6 = 3m^6$; в) $x \cdot x = 2x$; г) $(x^2)^3 = x^5$; д) $x^6 : x^3 = x^2$;

е) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4}$; є) $(3my^2)^4 = 81my^8$; ж) $n^2m^4 = (nm)^4$; з) $4x^6y^9 : 2x^2y^3 = 2x^3y^3$.

5. Чому спільним знаменником дробів $\frac{4}{5}$ і $\frac{3}{7}$ буде 35? (очікувана відповідь: 5 і 7 взаємно прості числа).

6. Чому спільним знаменником дробів $\frac{7}{12}$ і $\frac{5}{24}$ є число 24? (очікувана відповідь: 24 кратне числу 12).

7. Яким буде спільний знаменник для дробів $\frac{2}{15}$ і $\frac{3}{10}$? Сформулюйте алгоритм пошуку.

8. Що означає розкласти вираз на множники?

9. Які способи розкладання на множники ви знаєте?

10. Чи правильно, що: а) $a^2 + b^2 = (a + b)^2$; б) $(a - b)^2 = a^2 - b^2$;

в) $x - 1 = 1 - x$; г) $(a - b)^2 = (b - a)^2$?

11. Яку дію в запису виразу не записують?

12. Що означає скоротити дріб?

13. Який дріб скоротили правильно?

а) $\frac{14+12}{6} = 16$; б) $\frac{12+6}{4} = \frac{6+3}{2}$; в) $\frac{16-4}{4} = 15$; г) $\frac{25-15}{20} = \frac{5-3}{4}$.

14. Як розкрити дужки у виразі, якщо перед ними стоїть знак «мінус»?

15. Чи правильно розкрито дужки:

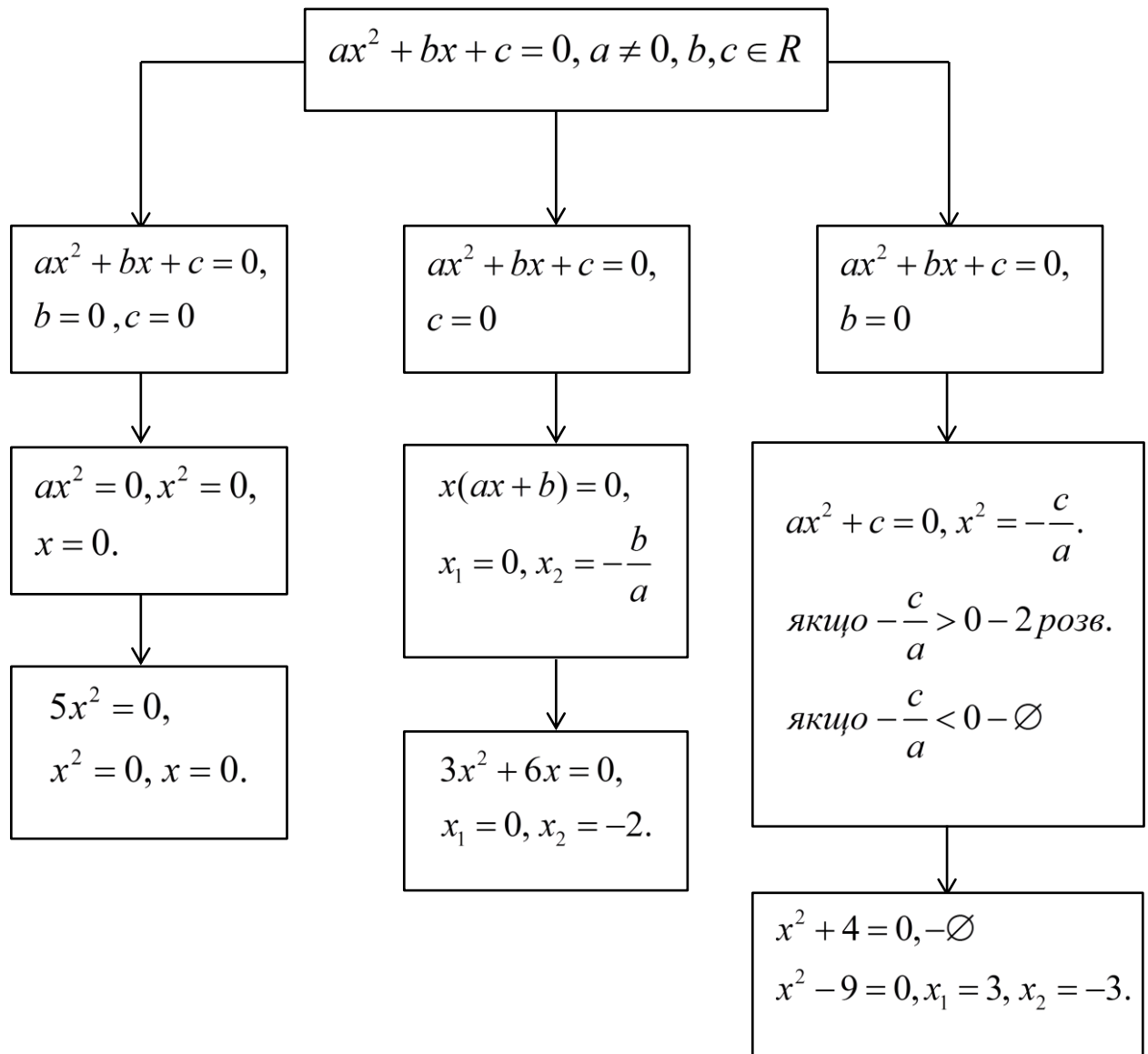
а) $18 - (13x + 24 - 11y) = 18 - 13x + 24 - 11y$;

б) $-(36x - 4) - (41x + 12 - 5y) = 36x - 4 - 41x - 12 - 5y$.

Помилки, яких припускалися учні 6-9 класів під час скорочення дробів

Тема: Скорочення дробів (6 клас) Завдання: Скоротіть дріб: $\frac{27+6}{36}$ Помилкове розв'язання: $\frac{27+\cancel{6}}{36} = \frac{27+1}{6}$
Тема: Вирази із звичайними та десятковими дробами (6 клас) Завдання: Знайдіть значення виразу: $\frac{2,1^2 : (4,9 + 10\frac{1}{2}) - 3,5}{8 - (4,9 + 10\frac{1}{2})}$ Помилкове розв'язання: $\frac{2,1^2 : (4,9 + \frac{1}{2}) - 3,5}{8 - (4,9 + \frac{1}{2})} = \frac{2,1^2 : \cancel{(4,9 + \frac{1}{2})} - 3,5}{8 - \cancel{(4,9 + \frac{1}{2})}} = \frac{2,1^2 : 1 - 3,5}{8 - 1}$
Тема: Раціональні вирази (8 клас) Завдання: Представте суму дробів у вигляді дробу: $\frac{3a^2 + 5b}{ac} + \frac{b - 3a}{c}$ Помилкове розв'язання: $\frac{3a^2 + 5b}{ac} + \frac{b - 3a}{c} = \frac{3\cancel{a}^2 + 5b}{\cancel{a}c} + \frac{b - 3a}{c} = \dots$
Тема: Раціональні рівняння (8 клас) Завдання: Розв'яжіть рівняння $\frac{2x^2 - 7x + 3}{2x - 1} = 1 + x$ Помилкове розв'язання: $\frac{2\cancel{x}^2 - \cancel{7}x + 3}{2x - \cancel{1}} = 1 + x$; $6x - 3 = 1 + x$
Тема: Раціональні нерівності (9 клас) Завдання: Розв'яжіть нерівність: $\frac{(x^2 - 9)(1 - x)}{x^2 - 9 + 8x} \geq 0$ Помилкове розв'язання: $\frac{(x^2 - 9)(1 - x)}{x^2 - 9 + 8x} \geq 0$; $\frac{(x^2 - \cancel{9})(1 - x)}{x^2 - \cancel{9} + 8x} \geq 0$; $\frac{1 - x}{1 + 8x} \geq 0$

Карта знань: неповні квадратні рівняння



Алгоритмічні приписи розв'язування дробово-раціональних рівнянь

Алгоритм 1 (використання умови рівності дробу нулю)

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної даного рівняння.
2. За допомогою тотожних перетворень звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{G(x)} = 0$.
3. Розв'язати рівняння $P(x) = 0$.
4. Серед коренів рівняння **виключити** ті, що не належать (ОДЗ).
5. Підставити одержані корені у початкове рівняння (зробити перевірку)
6. Записати відповідь.

Схема:

$$\frac{P(x)}{G(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} P(x) = 0, \\ G(x) \neq 0. \end{cases}$$

Алгоритм 2

(використання основної властивості пропорції)

1. Знайти область допустимих значень (ОДЗ) змінної даного рівняння.
2. Звести рівняння до вигляду $\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{M(x)}{N(x)}$.
3. Скориставшись основною властивістю пропорції записати ціле рівняння $P(x)N(x) = M(x)G(x)$.
4. Розв'язати одержане ціле рівняння.
5. Серед коренів рівняння **виключити** ті, що не належать (ОДЗ).
6. Підставити одержані корені у початкове рівняння (зробити перевірку).
7. Записати відповідь.

Схема:

$$\frac{P(x)}{G(x)} = \frac{M(x)}{N(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} P(x)N(x) - G(x)M(x) = 0, \\ G(x) \neq 0, \\ N(x) \neq 0. \end{cases}$$

Коментоване розв'язування рівняння:

Приклад. Розв'язати рівняння $\frac{3}{x-2} = \frac{5}{x-1}$.

Записи на дошці	Алгоритмічний припис
$\frac{3}{x-2} = \frac{5}{x-1}$ ОДЗ: $x-2 \neq 0$ і $x-1 \neq 0$ тобто $x \neq 2$ і $x \neq 1$.	Щоб не забути врахувати ОДЗ, краще зафіксувати його обмеження на початку розв'язання рівняння.
$\frac{3}{x-2} - \frac{5}{x-1} = 0$	При перенесенні члена з однієї частини правильної рівності в іншу з протилежним знаком рівність залишається правильною.
$\frac{3(x-1) - 5(x-2)}{(x-2)(x-1)} = 0,$ $\frac{-2x+7}{(x-2)(x-1)} = 0.$	Внаслідок приведення до спільного знаменника, розкриття дужок і зведення подібних членів, одержуємо правильну рівність
$-2x+7=0 \quad , \quad \text{тобто}$ $x = -3\frac{1}{2}$	Дріб дорівнює нулю тоді і тільки тоді, коли чисельник дробу дорівнює нулю, а знаменник не дорівнює нулю.
$x \neq 2 \text{ і } x \neq 1.$	Оскільки всі перетворення були рівносильні тільки з врахуванням ОДЗ, то ми <u>повинні перевірити</u> , чи задовольняє одержане число обмеженням ОДЗ.

Розкриття софізмів

Софізми (грецьке *Sophizma* – вигадка, хитрість) – це хибні результати, отримані з допомогою міркувань, які здаються правильними, але обов'язково містять якусь помилку. Стародавні вчені залишили нам немало таких суджень. Наприклад: «Те, що ти не загубив, ти маєш. Ти не загубив крила, отже, ти їх маєш».

Перший збірник математичних софізмів і парадоксів «Псевдарій» Евклід присвятив помилкам у геометричних доведеннях. Аналіз софізмів має важливе педагогічне значення, бо розібрати софізм – означає знайти помилку.

Математик-методист М. Брадїс відзначав: «Сам процес знаходження помилки в різних математичних судженнях важливо зробити захопливим, а розгляд помилок може стати засобом для підвищення інтересу до вивчення математики».

Аналіз та знаходження помилки, допущеної в софізмі, часто виявляється більш повчальним, ніж просто розбір розв'язків «безпомилкових» завдань.

Найбільш поширеним вважаються помилки, які допускають учні, при розгляді софізмів:

- ділення на нуль;
- неправильні висновки з рівності дробів;
- неправильне добування квадратного кореня з квадрата виразу;
- порушення правил дій з іменованими величинами;
- плутанина з поняттям «рівність» і «еквівалентність» відносно множин;
- нерівносильний перехід від однієї нерівності до іншої;
- виконання перетворень над математичними об'єктами, що не мають змісту;
- висновки і обчислення за неправильним малюнком до задачі;
- помилки, що виникають під час операцій з нескінченними рядами і граничним переходом.

У дослідженні пропонуємо застосовувати софізми на уроках математики з метою попередження типових помилок учнів, для більш осмисленого розуміння навчального матеріалу. Розкриття софізмів привчає учнів до уважності та критичного аналізу. Усвідомлюючи зміст софізмів, вони запобігають таких помилок під час виконання завдань.

Завдання 1. Розкрийте софізм: « $2 \cdot 2 = 5$ ».

Нехай $a = b + c$.

Помножимо обидві частини рівності на 5, маємо: $5a = 5b + 5c$ (1).

Додамо почленно рівність (1) до рівності $4b + 4c = 4a$ і віднімемо від обох частин утвореної рівності $9a$, маємо:

$$5a + 4b + 4c - 9a = 5b + 5c + 4a - 9a; \quad 4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a;$$

$$4b + 4c - 4a = 5b + 5c - 5a; \quad 4(b + c - a) = 5(b + c - a).$$

Отже, $4 = 5$, тобто $2 \cdot 2 = 5$.

Завдання 2. Знайти помилку у міркуванні: Якщо $a > b$, то $a > 2b$, де a, b – додатні числа.

Нехай маємо: $a > b$.

$$a > b \cdot b$$

$$a \cdot b > b \cdot b$$

$$a \cdot b > b \cdot b - (a \cdot a)$$

$$a \cdot b - (a \cdot a) > b \cdot b - (a \cdot a)$$

$$a \cdot (b - a) > (b + a) \cdot (b - a) \quad / : (b - a)$$

$$a > (b + a) \quad / + (a > b) \text{ почленно}$$

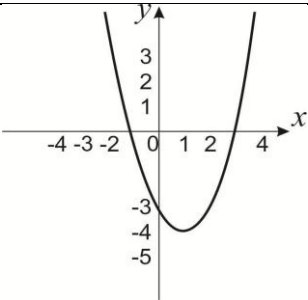
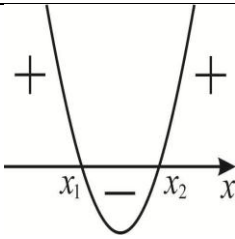
$$2a > 2b + a \quad / \cdot (-a)$$

$$a > 2b.$$

Тобто, з того, що $a > b$ випливає, що $a > 2b$.

Порівняльна карта знань: Особливості побудови графіка функції

$y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ і схематичного його зображення під час розв'язування квадратних нерівностей

графік квадратичної $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	властивості функції	схематичне зображення графіка квадратичної $y = ax^2 + bx + c, a \neq 0$	графіка функції
			
1. Напрямок віток параболи. 2. Нулі функції. 3. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень. 4. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.		1. Напрямок віток параболи. 2. Нулі функції. 3. Значення аргументу, для яких функція набуває додатних значень. 4. Значення аргументу, для яких функція набуває від'ємних значень.	
5. Задання допоміжних точок для більшої точності графіку. 6. Область визначення функції. 7. Область значення функції. 8. Точки перетину функції з віссю ординат. 9. Проміжки зростання і спадання функції. 10. Найбільше і найменше значення функції.			

Приклади «провокативних» завдань (за В. О. Колосовою)

I. Завдання, умови яких нав'язують учневі в тій або іншій формі неправильну відповідь;

II. Завдання, умови яких підказують учневі тим або іншим способом неправильний спосіб розв'язування.

III. Задачі, що змушують учня придумувати, складати, будувати такі математичні об'єкти, які за заданих умов не можуть мати місця.

IV. Задачі, що вводять учня в оману через неоднозначне трактування термінів, словесних зворотів, буквених або числових виразів.

I. *Серед завдань, умови яких спонукають учня до вибору неправильної відповіді корисно розрізняти наступні.*

1. *Завдання, що нав'язують певну відповідь.*

Наведемо приклади таких завдань.

1) Скільки граней має новий шестигранний олівець?

(Деякі учні припускаються помилок вказуючи на відповідь: 6 граней, але вона неправильна, оскільки крім 6 бічних граней у нового олівця є ще 2 грані. Правильна відповідь: 8 граней).

2) Скільки цифр буде потрібно, щоб записати дванадцятизначне число? (Учні вказують відповідь: 12 цифр, але вона неправильна, оскільки всього цифр лише десять. Правильна відповідь: дванадцятизначне число можна записати за допомогою однієї, двох, трьох, чотирьох, п'яти, шести, семи, восьми, дев'яти, десяти цифр).

3) Скільки вертикальних і скільки горизонтальних відрізків зображено на рис. 1?

(Деякі учні стверджують, що відповідь: 2 вертикальних і 3 горизонтальних відрізки, але вона неправильна, оскільки горизонтальних відрізків значно більше. Правильна відповідь: 2 вертикальних і 12 горизонтальних).

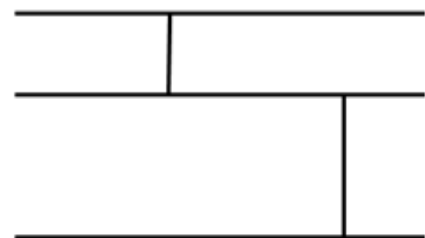


рис. 1

2. *Задачі, які змушують учня зробити вибір неправильної відповіді із запропонованих умовою.*

Наведемо приклади таких завдань.

1. Яке з чисел 205, 206, 207, 208, 209, 210 є простим числом?

(В більшості випадків учні відповідають, що це число 209 або 207, але це неправильно, бо всі записані числа є складеними. Правильна відповідь: ніяке.)

2) Яке з тверджень є правильним?

а) чотирикутник, діагоналі якого діляться точкою перетину навпіл і взаємно перпендикулярні, є прямокутником;

б) чотирикутник, діагоналі якого діляться точкою перетину навпіл і рівні, є ромбом;

в) чотирикутник, діагоналі якого взаємно перпендикулярні і рівні, є квадратом.

(Найчастіше учні вибирають твердження в), хоча всі твердження помилкові. Правильна відповідь: ніяке).

3. *Завдання, умови яких не містять в явному вигляді неправильної відповіді, але певним чином вказують на неї.*

Наведемо приклад таких завдань.

Яке просте число наступне після числа 200? (Напрошується відповідь: 201, адже 201 – це число наступне за числом 200. Але ця відповідь неправильна, оскільки число 201 – складене. Правильна відповідь – 211).

II. Серед завдань, що спонукають учня до вибору неправильного способу розв'язання, корисно розрізняти такі.

I. *Завдання, умови яких підштовхують учня до того, щоб виконати яку-небудь дію із заданими числами або величинами, тоді як виконувати цю дію зовсім не потрібно.*

Наведемо приклад таких завдань.

1) Трійка коней пробігла 15 км. Скільки км пробіг кожен кінь?

(Більшість виконує ділення 15 на 3 і отримують відповідь 5 км. Але ця відповідь неправильна, дію ділення виконувати зовсім не потрібно. Правильна відповідь 15 км).

2) (Старовинна задача). Йшов чоловік до Москви і зустрів 7 жінок, у кожної з них було по мішку, а в кожному мішку по котові. Скільки істот прямувало до Москви?

(Більшість знаходить суму $1+7+7$ і отримують відповідь 15 істот. Але ця відповідь неправильна, адже до Москви йшов один чоловік. Правильна відповідь: один чоловік).

2. Завдання, умови яких підштовхують учня до виконання якоїсь певної дії, тоді як виконувати потрібно іншу (часто обернену) дію.

Наведемо приклади таких завдань.

1) У палиці 2 кінці. Якщо один з них відпиляти, скільки кінців вийде.

(Деякі учні виконують віднімання $2-1$ і отримують відповідь: 1 кінець. Але ця відповідь неправильна, адже потрібно знаходити не різницю $2-1$, а суму $2+2$. Правильна відповідь: 4 кінці).

2) Поверхня столу має 4 кути. Якщо один з них відпиляти, скільки кутів буде у поверхні?

(Деякі учні виконують віднімання $4-1$ і отримують відповідь 3 кути. Але ця відповідь неправильна, адже потрібно знайти не різницю $4-1$, а суму $3+2$. Правильна відповідь: 5 кутів).

3. Завдання, умови яких підштовхують учня до виконання якогось одного або декількох дій цілком певним чином, тоді як виконувати дії потрібно інакше.

Наведемо приклади таких завдань.

1) На руках 10 пальців. Скільки пальців на 10 руках?

(Напрошується виконати множення $10 \cdot 10$ і отримати відповідає 100 пальців. Але ця відповідь неправильна, потрібно обчислювати інакше: $10 (10 : 2)$. Правильна відповідь 50 пальців).

2) Сталевий брус важить 40 кг. Скільки важитиме брус, якщо зменшити всі його розміри в 4 рази?

(Умова підштовхує виконати ділення $40 : 4$ і отримати відповідас 10 кг. Але ця відповідь неправильна. Потрібно обчислювати інакше: $40 : (4*4*4)$. Правильна відповідь: 625 гр.)

4. Завдання, умови яких підштовхують учня до виконання якої-небудь дії, тоді як виконати її неможливо.

Наведемо приклад таких завдань.

Двоє пішли, 3 гриби знайшли. Четверо підуть, скільки грибів знайдуть?

(Умова підштовхує учнів виконати дії: 1) $4 : 2$, 2) $3*2$ і отримати відповідь 6 грибів. Але такої кількості грибів в лісі може і не бути. Правильна відповідь: невідомо).

III. Завдання, що змушують учня придумувати, складати, будувати, створювати нереальні за заданих умов математичні об'єкти.

Наведемо приклад таких завдань.

Придумайте просте трьохзначне число, в записі якого вживаються лише цифри 1 і 4.

(Придумати таке число не можна, оскільки будь-яке число, що задовольняє умову завдання, кратне 3 і, отже не є простим).

IV. До завдань, що вводять учня в оману через неоднозначність трактування термінів, словесних оборотів можна віднести такі.

1) Чому дорівнює 2^2 , 3^2 , 5^2 , а кут в квадраті? (В квадраті всі кути прямі).

2) На листі паперу написано число 606. Яку дію потрібно виконати, щоб збільшити його в півтора рази? (Перевернути аркуш паперу) [119].