ПРОГРАМА

вступного іспиту зі спеціальності

111 «Математика»

для вступників на навчання в аспірантурі

Аналіз

Елементи теорії множин. Відображення множин. Еквівалентні множини. Порівняння потужностей. Скінченні і зліченні множини. Теорема про потужність усіх підмножин.

Метричні простори. Збіжність у метричних просторах, повнота і поповнення. Приклади. Стискаючі відображення і нерухомі точки. Компактні множини. Критерії компактності.

Функції. Властивості неперервних на компакті функцій. Диференційовні функції однієї та багатьох змінних, їх властивості. Формули Тейлора та їх застосування. Екстремум і умовний екстремум функції багатьох змінних. Теорема про неявну функцію.

Ряди. Числові ряди: ознаки збіжності, умовна і абсолютна збіжність. Функціональні ряди. Ознаки їх рівномірної збіжності. Степеневі ряди та умови їх збіжності.

Визначені інтеграли. Умови існування. Зв’язок з невизначеним інтегралом. Застосування.

Кратні, криволінійні та поверхневі інтеграли. Теорема існування, заміна змінних і обчислення кратних інтегралів. Формули Гріна, Гауса-Остроградського і Стокса. Умова незалежності криволінійного інтегралу від шляху інтегрування.

Невласні і залежні від параметру інтеграли. Ознаки збіжності, диференціювання та інтегрування за параметром.

Міра та інтеграл. Міри Лебега і Лебега-Стілтьєса. Означення і властивості інтегралу Лебега. Теорема про граничний перехід під знаком інтеграла. Добуток мір і теорема Фубіні. Функції обмеженої варіації і заряди. Інтеграл Стілтьєса. Абсолютно неперервні функції. Абсолютна неперервність і сингулярність мір. Похідна монотонної функції. Похідна від інтегралу за верхньою межею. Інтеграли по довільних мірах.

Функції комплексної змінної. Елементарні функції комплексної змінної. Умова аналітичності функції. Теорема і формула Коші. Принцип максимуму модуля. Розклад в ряд Тейлора і Лорана. Класифікація ізольованих особливих точок. Теорема Ліувілля. Лишки. Принцип аргументу. Теорема Руше. Властивості єдиності аналітичних функцій. Аналітичне продовження. Конформні відображення. Теорема Рімана.

Лінійні нормовані простори. Поняття лінійного нормованого простору. Приклади і основні властивості. Простори C, L_p, l_p, їх повнота, щільні множини у цих просторах. Лінійні неперервні функціонали. Теорема Гана-Банаха. Спряжений простір, його повнота. Слабка збіжність лінійних неперервних функціоналів. Слабка топологія в спряженому просторі. Гільбертові простори. Теорема про ортогональну проекцію. Ортонормовані системи і базиси. Нерівність Бесселя і рівність Парсеваля. Ізоморфізм сепарабельних гільбертових просторів.

Лінійні оператори. Означення і найпростіші властивості. Простір лінійних обмежених операторів. Добуток операторів. Обернений оператор. Теорема Банаха про обернений оператор. Сильна збіжність операторів. Теорема Банаха-Штейнгауза. Резольвента і спектр оператора. Компактні оператори, їх властивості. Теореми Фредгольма для рівнянь з компактними операторами. Самоспряжені оператори, їх спектр. Оператори Гільберта-Шмідта.

Л і т е р а т у р а

1. Кудрявцев Л. Д. Курс математического анализа (в трех томах). – М.: Высш. школа, 1988, т.1, 2, 3.

2. Дороговцев А. Я. Математический анализ. – К.: Факт, 2004. – 558с.

3. Березанський Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функціональний аналіз. – Львів: Число, 2014. – 558с.

4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функціонального анализа. – М.: Наука, 1989. – 624с.

5. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ, ч. 1. – М.: Наука, 1985. – 336с.

Алгебра

Лінійна алгебра. Лінійні простори і лінійні відображення. Операції з лінійними просторами (пряма сума, фактор-простори). Спряжений простір. Власні вектори і значення лінійних операторів. Жорданова нормальна форма лінійного оператора. Евклідові простори. Ортогональні, унітарні та самоспряжені оператори. Симплектичні оператори. Геометрія квадратичних форм. Приведення квадратичної форми до канонічного виду.

Теорія груп. Означення групи, підгрупи, нормального дільника, фактор-групи. Розклад групи за нормальним дільником. Приклади скінченних, нескінченних, абелевих, неабелевих, циклічних груп. Гомоморфізми груп.

Елементи загальної алгебри. Кільця, підкільця, ідеали, модулі та їх гомоморфізми. Алгебри, приклади.

Л і т е р а т у р а

1. Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. – М.: Наука, 1986. – 304с.

2. Курош А. Г. Курс высшей алгебры. – М. Наука, 1968.

3. Ленг С. Алгебра. – М.: Мир, 1968.

4. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. – М.: Наука, 1966.

Диференціальні рівняння і математична фізика.

Звичайні диференціальні рівняння. Теорема Пікара існування та єдиності розв’язку задачі Коші. Основні класи рівнянь, які інтегруються в квадратурах. Рівняння Ріккаті. Особливі точки. Диференціальні рівняння n-го порядку. Рівняння Ейлера.

Системи диференціальних рівнянь. Загальний розв’язок. Теореми існування та єдиності. Неперервна залежність розв’язку задачі Коші від початкових даних та параметрів.

Лінійні рівняння *n*-го порядку. Розв’язок лінійних рівнянь зі сталими коефіцієнтами. Основні властивості розв’язків. Однорідні і неоднорідні лінійні рівняння. Метод варіації довільних сталих.

Системи лінійних рівнянь. Фундаментальна матриця розв’язків. Формула Остроградського-Ліувілля. Перші інтеграли системи диференціальних рівнянь, їх існування та застосування.

Крайові задачі. Функція Гріна. Задача Штурма-Ліувілля. Власні значення та власні функції.

Рівняння в частинних похідних. Класифікація лінійних рівнянь другого порядку. Постановка задач для еліптичних, гіперболічних і параболічних рівнянь. Коректність постановки задач. Інтеграл Пуассона для рівняння теплопровідності. Функція Гріна теорії потенціалу для круга і кулі. Задача Коші для хвильового рівняння, формула д’Аламбера. Мішані задачі для гіперболічних і параболічних рівнянь. Метод Фур’є. Гармонічні функції та їх властивості.

Л і т е р а т у р а

1. Самойленко А. М., Перестюк М. О., Парасюк І. О. Диференціальні рівняння. – К.: Либідь, 2003.

2. Перестюк М. О., Маринець В. В. Теорія рівнянь математичної фізики. – К.: Либідь, 2001.

3. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981.

4. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1972.

5. Соболев С. Л. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1971.

6. Михлин С. Г. Курс математической физики. – М.: Наука, 1968.

7. Петровский И. Г. Лекции по теории интегральных уравнений. – М.: Наука, 1965.

8. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1970.

9. Коддингтон Э. Д., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958.

Теорія ймовірностей та математична статистика

Аксіоми теорії ймовірностей [1,2]. Випадкові величини, функції розподілу, числові характеристики випадкових величин [1,2].

Характеристичні функції [1,2]. Розподіли: біноміальні, пуасоновські, нормальні [2].

Нерівність Чебишова. Закон великих чисел [1,2]. Центральна гранична теорема [1,2]. Ланцюги Маркова з дискретним часом і скінченою множиною станів [1,2]. Пуасонівський процес. Процеси розмноження та загибелі [1,2]

Методи оцінювання параметрів розподілів (метод моментів, метод максимальної правдоподібності) [2]. Властивості оцінок (незміщенність, самостійність, ефективність) [2]. Лема Неймана-Пірсона [2].

Л і т е р а т у р а

1. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т.1,2. М.: Мир, 1984.

2. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятностей и математическая статистика. К.: Вища школа, 1979.

Елементи геометрії та топології

Топологічні та метричні простори. Аксіоми віддільності. Неперервні відображення та гомеоморфізми [1]

Поняття компактності, зв'язності та лінійної зв'язності. Теореми про збереження цих властивостей при непереревних відображеннях [1]

Поняття гомотопії відображень. Фундаментальна група топологічного простору.

Поняття многовиду та його дотичного розшарування. Класифікація двовимірних компактних многовидів [2].

Кривина та скрут кривої. Формули Френе [2].

Перша та друга квадратична форми поверхні. Середня та гаусова кривина поверхні [2].

Л і т е р а т у р а

1. Келли Дж. Общая топология, М.: Наука. - 1968. - 383 с.

2. Дубровин Б.А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. М.: Наука. - 1979. - 760 с.